

ランダムなブロディ曲線のレート歪み次元

原案：塚本真輝，文章作成：ChatGPT

Abstract

Brody 曲線の力学系に対し，情報理論の率歪み理論と平均次元の変分原理を組み合わせて，Ruelle 型不等式

$$\mathrm{rdim}(B_N, T, d, \mu) \leq \int_{B_N} \psi d\mu, \quad \psi(f) = 2(N+1)|df|^2(0)$$

を示し，さらに任意の $0 \leq c < 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)$ に対して等号を達成する $\mathbb{C}$ -不変確率測度 μ を構成する ($\mathrm{rdim} = \int \psi = c$)．ここで $\rho(\mathbb{CP}^N)$ はエネルギー密度である．これにより既知の等式 $\mathrm{mdim}(B_N, T) = 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)$ は

$$\sup_{\mu} \mathrm{rdim}(B_N, T, d, \mu) = \sup_{\mu} \int \psi d\mu$$

という測度論的変分原理として再解釈される．

時間が無かったため，このアブストラクトは私（塚本）の次の論文

Tsukamoto, M. Rate Distortion Dimension of Random Brody Curves. Geom. Funct. Anal. 35, 915–978 (2025). <https://doi.org/10.1007/s00039-025-00709-x>

を ChatGPT 5 Pro に読み込ませて日本語で要約させたものです．私がわずかに修正を加えました．残念ながら，私のプロンプトの指示が良くないのか，それとも AI の能力がまだ十分ではないのか，あまり出来が良くありません．ご笑覧いただければ幸いです．

この研究発表にあたり科研費（JP25K06974）の補助を受けました．

主定理の要約

複素平面 $\mathbb{C}$ から複素射影空間 $\mathbb{CP}^N$ への 1-リプシッツ正則写像を Brody 曲線と呼ぶ． $\mathbb{CP}^N$ への Brody 曲線の空間 B_N と $\mathbb{C}$ の平行移動作用 T を考える．任意の T -不変確率測度 μ に対し

$$\mathrm{rdim}(B_N, T, d, \mu) \leq \int \psi d\mu$$

が成り立ち，しかも任意の $0 \leq c < 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)$ に対し $\mathrm{rdim} = \int \psi = c$ を満たす μ を具体的に構成できる．(Ruelle 不等式の Brody 曲線版と等号達成測度の豊富性.)

1 背景と目的

Brody 曲線は $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^N$ の 1-Lipschitz 正則写像で， B_N はコンパクト距離空間となり $\mathbb{C}$ が平行移動で連続的に作用する．Gromov により $\mathrm{mdim}(B_N, T)$ の研究が始まり， $\mathrm{mdim}(B_N, T) = 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)$ が知られている．本論文はこれを測度ごとの **率歪み次元** rdim と局所エネルギーに基づく **幾何ポテンシャル** ψ で精密化する．

2 設定と用語

- 計量 $d(f, g) = \max_{z \in [0,1]^2} d_{\text{FS}}(f(z), g(z))$.
- 幾何ポテンシャル $\psi(f) = 2(N+1)|df|^2(0)$ (他の等価な平均化形でも同値).
- 率歪み関数 $R(d, \mu, \varepsilon)$ と率歪み次元

$$\text{rdim} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R(d, \mu, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

- 積分 $\int_{B_N} \psi d\mu$ (μ は T 不変確率測度) の上限を $\rho(\mathbb{CP}^N)$ と書く.

3 主定理

定理 1 (Ruelle 型不等式 (原論文 Thm. 2.4)). 任意の T -不変確率測度 μ に対し

$$\text{rdim}(B_N, T, d, \mu) \leq \int_{B_N} \psi d\mu.$$

定理 2 (等号達成測度の構成 (原論文 Thm. 2.5)). 任意の $0 \leq c < 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)$ に対して, 不変測度 μ が存在し

$$\text{rdim}(B_N, T, d, \mu) = \int_{B_N} \psi d\mu = c$$

を満たす.

以上により

$$\sup_{\mu} \text{rdim}(B_N, T, d, \mu) = \sup_{\mu} \int_{B_N} \psi d\mu = 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)$$

が従う. ($\text{mdim}(B_N, T) = 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)$ の測度論的再表現.)

4 証明アイデアの骨子

平均次元 with potential の変分原理 連続作用 (X, T) と連続関数 φ に対し

$$\text{mdim}(X, T, \varphi) \leq \sup_{\mu} \{ \text{rdim}(X, T, d, \mu) + \int \varphi d\mu \} \leq \text{mdim}_M(X, T, d, \varphi).$$

ここで $\varphi = -\psi$ をとる.

鍵等式 (Brody 版の「圧力 = 0」) 変形理論とカバーリング見積りにより

$$\text{mdim}(B_N, T, -\psi) = \text{mdim}_M(B_N, T, d, -\psi) = 0$$

を示す (原論文 Thm. 6.4). これを上の変分不等式へ代入して $\text{rdim} \leq \int \psi$ を得る. Axiom A 力学系における $P_T(-\phi) = 0$ に対応.

等号達成測度の構成 非退化 Brody 曲線 f の一次変形空間 H_f とその有限次元部分空間 V (Riemann–Roch による次数下界) を使い, V の球面上一様測度を変形写像で B_N に押し出し, さらに領域平均で T -不変化. Kawabata–Dembo の下界と上の上界を噛み合わせ

$$\text{rdim}(B_N, T, d, \mu) = \int \psi d\mu = 2(N+1)\rho(f)$$

を得る. スケーリングで任意の c を実現する.

5 例と補足

例 3 (ランダム級数 (原論文 Ex. 2.1)). 十分大きい格子 Λ とパラメータ u_λ, w を一様を選び

$$f(z+w) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{u_\lambda}{(z+w-\lambda)^3}$$

で定まる確率測度は T -不変となり, 「ランダム Brody 曲線」の典型例になる.

例 4 (素朴な等式の破綻 (原論文 Ex. 2.3)). 周期軌道上の一様測度では $\text{rdim} = 0$ だが $\int \psi > 0$ となり, 一般には $\text{rdim} = \int \psi$ は成り立たない.

補足 5 (Nevanlinna との接続 (原論文 Rem. 2.6)). Nevanlinna–Shimizu–Ahlfors 特性 $T(R, f)$ の主項係数が $\int \psi d\mu$ に一致 (μ -a.e. f). 解析的量と情報理論的量の対応が得られる.

6 技術ツールの位置づけ

- 率歪み理論: 連続時間版の定義・下界 (Kawabata–Dembo).
- 平均次元 with potential の変分原理: mdim , mdim_M , rdim を橋渡し.
- 変形理論・グルーピング: 非退化化とエネルギー制御により $\text{mdim}_M(B_N, T, d, -\psi) = 0$ を導く.

いずれも原論文 §§ 4–6, 8–9 に詳しい.

7 意義と展望

情報理論的量 (率歪み次元) を Brody 曲線の力学系に導入し, 幾何ポテンシャルの積分で抑える Ruelle 型不等式と, その等号達成測度の豊富さを示した. 平均次元の公式を測度的変分原理として再統一する. 未解決問題として, 任意の $c \in (0, 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N))$ に対して エルゴード測度で $\text{rdim} = \int \psi = c$ を達成できるか (原論文 Problem 9.10).

まとめ (式の一覧)

幾何ポテンシャル	$\psi(f) = 2(N+1) df ^2(0).$
Ruelle 型不等式	$\text{rdim}(B_N, T, d, \mu) \leq \int_{B_N} \psi d\mu.$
等号達成	$\forall c \in [0, 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N)) \exists \mu : \text{rdim} = \int \psi = c.$
測度版変分原理	$\sup_{\mu} \text{rdim} = \sup_{\mu} \int \psi d\mu = 2(N+1)\rho(\mathbb{CP}^N).$

参考文献

- [1] R. L. Adler and B. Weiss, Similarity of automorphisms of the torus, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **98** (1970).
- [2] D. V. Anosov, Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, *Proc. Steklov Inst. Math.* **90** (1967), 1–235.

- [3] R. Bowen, Some systems with unique equilibrium states, *Math. Systems Theory* **8** (1974/75), 193–202.
- [4] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. **470**, Springer, 1975.
- [5] R. Brody, Compact manifolds and hyperbolicity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), 213–219.
- [6] B. F. P. Da Costa, Deux exemples sur la dimension moyenne d’un espace de courbes de Brody, *Ann. Inst. Fourier* **63** (2013), 2223–2237.
- [7] B. F. P. Da Costa and J. Duval, Sur les courbes de Brody dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, *Math. Ann.* **355** (2013), 1593–1600.
- [8] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (2nd ed.), Wiley, New York, 2006.
- [9] J. Duval, Sur le lemme de Brody, *Invent. Math.* **173** (2008), 305–314.
- [10] J. Duval, Around Brody lemma, in *Hyperbolicity properties of algebraic varieties*, 1–12, Panor. Synthèses, 56, Société Mathématique de France, Paris, 2021.
- [11] M. Einsiedler and T. Ward, *Ergodic theory with a view toward number theory*, Grad. Texts in Math. 259, Springer-Verlag London, 2011.
- [12] A. Eremenko, Normal holomorphic curves from parabolic regions to projective spaces, preprint, Purdue University (1998), arXiv:0710.1281.
- [13] R. M. Gray, *Entropy and Information Theory* (2nd ed.), Springer, New York, 2011.
- [14] M. Gromov, Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I, *Math. Phys. Anal. Geom.* **2** (1999), 323–415.
- [15] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes* (2nd ed.), North-Holland; Kodansha, 1989.
- [16] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [17] T. Kawabata and A. Dembo, The rate distortion dimension of sets and measures, *IEEE Trans. Inf. Theory* **40** (1994), 1564–1572.
- [18] E. Lindenstrauss, Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **89** (1999), 227–262.
- [19] E. Lindenstrauss and M. Tsukamoto, From rate distortion theory to metric mean dimension: variational principle, *IEEE Trans. Inf. Theory* **64** (2018), 3590–3609.
- [20] E. Lindenstrauss and M. Tsukamoto, Double variational principle for mean dimension, *Geom. Funct. Anal.* **29** (2019), 1048–1109.
- [21] E. Lindenstrauss and B. Weiss, Mean topological dimension, *Israel J. Math.* **115** (2000), 1–24.
- [22] S. Matsuo and M. Tsukamoto, Brody curves and mean dimension, *J. Amer. Math. Soc.* **28** (2015), 159–182.

- [23] J. Noguchi and Jörg Winkelmann, *Nevanlinna theory in several complex variables and diophantine approximation*, Springer Tokyo, 2014.
- [24] D. S. Ornstein and B. Weiss, Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups, *J. Analyse Math.* **48** (1987), 1–141.
- [25] M. B. Pursley and R. M. Gray, Source coding theorems for stationary, continuous-time stochastic processes, *Ann. Probab.* **5** (1977), 966–986.
- [26] D. Ruelle, Statistical mechanics on a compact set with $\mathbb{Z}^\nu$ action satisfying expansiveness and specification, *Trans. Amer. Math. Soc.* **185** (1973), 237–251.
- [27] D. Ruelle, An inequality for the entropy of differentiable maps, *Bol. Soc. Bras. Mat.* (1978), 83–87.
- [28] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948), 379–423, 623–656.
- [29] C. E. Shannon, Coding theorems for a discrete source with a fidelity criterion, *IRE Nat. Conv. Rec.* Pt. 4 (1959), 142–163.
- [30] Ya. G. Sinai, Gibbs measures in ergodic theory, *Russian Math. Surveys* **27** (1972), 21–69.
- [31] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817.
- [32] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets*, Grad. Texts in Math. 180, Springer, 1998.
- [33] M. Tsukamoto, A packing problem for holomorphic curves, *Nagoya Math. J.* **194** (2009), 33–68.
- [34] M. Tsukamoto, Deformation of Brody curves and mean dimension, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **29** (2009), 1641–1657.
- [35] M. Tsukamoto, Mean dimension of the dynamical system of Brody curves, *Invent. Math.* **211** (2018), 935–968.
- [36] M. Tsukamoto, Double variational principle for mean dimension with potential, *Adv. Math.* **361** (2020), 106935.
- [37] M. Tsukamoto, Remark on the local nature of metric mean dimension, *Kyushu J. Math.* **76** (2022), 143–162.
- [38] M. Tsukamoto, Variational principle for mean dimension with potential of R^d -actions: I, *J. Math. Soc. Japan*, Advance Publication (October 2024). DOI: 10.2969/jmsj/92279227.
- [39] P. Walters, A variational principle for the pressure of continuous transformations, *Amer. J. Math.* **97** (1975), 937–971.
- [40] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer, New York, 1982.
- [41] J. Winkelmann, On Brody and entire curves, *Bull. Soc. math. France* **135** (2007), 25–46.
- [42] K. Yosida, On a class of meromorphic functions, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* **16** (1934), 227–235.