Hankel 作用素の特徴付け問題と Bloch 型関数

田中 清喜　(名城大学)*

概　要

本講演は，山路哲史氏との共同研究である [6, 7, 8] に基づく．Axler[1] によって歪正則関数をシンボルとする Bergman 空間上の Hankel 作用素が有界もしくはコンパクトであることの特徴づけがなされ，この結果の後に様々な作用素の有界性，コンパクト性が与えられている．本講演でも Axler の結果をもとに有界な Hankel 型作用素の特徴づけについて得られた結果を紹介する．

1　設定および導入

本節では，講演に現れる記号の定義および既存の結果を紹介する．

$\mathbb{D}$ を $\mathbb{C}$ の開単位円板とし，$\alpha > -1$ とする．重み付き測度を

$$dV_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^\alpha dV(z)$$

とし，$A^p_\alpha := \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, dV_\alpha)$ とする．A^2_α は再生核 Hilbert 空間であり，再生核は $K^{(\alpha)}_w(z) = K^{(\alpha)}(z,w) = 1/(1-z\overline{w})^{2+\alpha}$ である．すなわち，$z \in \mathbb{D}, f \in A^2_\alpha$ に対し再生公式

$$f(z) = \langle f, K^{(\alpha)}_z\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K^{(\alpha)}_z(w)}dV_\alpha(w) = \int_{\mathbb{D}} K^{(\alpha)}(z,w)f(w)dV_\alpha(w) \tag{1}$$

が成立し，直交射影 $P^{(\alpha)} : L^2(\mathbb{D}, dV_\alpha) \to A^2_\alpha$ は

$$P^{(\alpha)}f(z) = \int_{\mathbb{D}} K^{(\alpha)}(z,w)f(w)dV_\alpha(w) \tag{2}$$

と表される．以下では, 重みを考えないとき, すなわち, $\alpha = 0$ のときの記号は $K(z,w) = K^{(\alpha)}(z,w)$ のように省略するものとする．単位円板上の Bergman 空間を考える際には再生公式 (1) は $f \in A^1_\alpha$ に対して成立し，$p > 1$ のとき (2) によって定義される $L^p(\mathbb{D}, dV_\alpha)$ から A^p_α への作用素 $P^{(\alpha)}$ は有界となる事に注意しておく *1．$\overline{A^2_\alpha} := \left\{\overline{f} : f \in A^2_\alpha\right\}$ も同様に再生核 Hilbert 空間であり，その再生核は A^2_α の複素共役によって与えられる．すなわち，直交射影 $\overline{P^{(\alpha)}} : L^2(\mathbb{D}, dV_\alpha) \to \overline{A^2_\alpha}$ は

$$\overline{P^{(\alpha)}}f(z) = \int_{\mathbb{D}} \overline{K^{(\alpha)}(z,w)}f(w)dV_\alpha(w) = \int_{\mathbb{D}} K^{(\alpha)}(w,z)f(w)dV_\alpha(w)$$

* 〒468-8502 愛知県名古屋市天白区塩釜口１丁目 501 番地 名城大学理工学部
e-mail: tanaka@meijo-u.ac.jp

*1 この拡張は関数の領域による話で単位円の場合は A^2_α の完全正規直交系および再生核が explicit に明示されていることが大きい．

と表される．また，Bergman 空間上の関数 φ をシンボルとする Hankel 作用素 H_φ および little Hankel 作用素 h_φ は (定義できるときに限り) 次で定義する：

$$H_\varphi f := \left(I - P^{(\alpha)}\right)[\varphi f], \quad h_\varphi f = \overline{P^{(\alpha)}}[\varphi f].$$

Q を $L^2(\mathbb{D}, dV_\alpha)$ から定数関数からなる 1 次元空間への射影とすると $\overline{P^{(\alpha)}} - Q \leq I - P^{(\alpha)}$，つまり $\|(\overline{P^{(\alpha)}} - Q)f\|_{2,\alpha} \leq \|(I - P^{(\alpha)})f\|_{2,\alpha}$ である *2．また，$\varphi \in L^\infty$ のときは $H_\varphi : A^2_\alpha \to (A^2_\alpha)^\perp$ および $h_\varphi : A^2_\alpha \to \overline{A^2_\alpha}$ は定義されており有界であることは明らかである．逆に，H_φ が有界だとすると $\varphi \in L^\infty$ となるかというとそうとは限らない．そのため，対応 $\varphi \leftrightarrow H_\varphi$ を考えようとすると関数空間側に何か条件が必要である．Axler[1] は次の定理を与えた．

定理 1（[1]） φ を正則関数とする．$H_{\overline{\varphi}} : A^2 \to (A^2)^\perp$ が有界であるための必要十分条件は φ が Bloch 関数である．$H_{\overline{\varphi}} : A^2 \to (A^2)^\perp$ がコンパクトであるための必要十分条件は φ が little Bloch 関数である．

この定理の設定を変えることで有界 Hankel 型作用素の特徴づけを考えた際にシンボル関数にどの程度の関数のクラスが現れるのかを本講演では紹介する．

2 Bloch 型空間における little Hankel 作用素

本節では，[6, 7] の内容について触れる．有界 little Hankel 作用素の特徴づけ問題を Axler[1] の設定から少し変更して観察する．先行研究としては Bonami-Luo[3] が Bergman 空間上の little Hnakel 作用素の有界性の特徴づけ問題を行っている．この論文と Wu-Zhao-Zorboska[9] による Bloch 型空間上の Toeplitz 作用素の有界性の特徴づけを参考に Bloch 型空間における little Hankel 作用素を考える．

$\alpha > 0$ に対して $\mathbb{D}$ 上正則かつ

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} := |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty$$

をみたす関数からなる空間を Bloch 型空間とよび $\mathcal{B}^\alpha$ と書く (この空間の詳しい性質は Zhu[10] を参照)．また，$\mathcal{B}^\alpha_0$ を $\mathcal{B}^\alpha$ の元であり $\lim_{|z|\to 1^-} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| = 0$ をみたす関数からなる空間，$\mathcal{LB}^\alpha$ を $\mathbb{D}$ 上正則かつ

$$\|f\|_{\mathcal{LB}^\alpha} := |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| \log \frac{e}{1 - |z|^2} < \infty$$

をみたす関数からなる空間とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して Lipschitz 空間 Λ_α を正則関数であり

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = |f(0)| + \cdots + \left|f^{(n-1)}(0)\right| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{n-\alpha} \left|f^{(n)}(z)\right| < \infty$$

*2 そのため，H_φ と h_φ の間には主要な部分では大小が成立しているのが Hankel 作用素と little Hankel 作用素の名称の由来であると思われる．

をみたす関数の成す空間とする．ここで，n は $n-\alpha>0$ となる最小の自然数とする．これらの空間については $0<\alpha<1$ のとき，$\mathcal{B}^\alpha=\Lambda_{1-\alpha}$ である．

$\gamma>0$ に対して

$$h_{\overline{\varphi}}^{(\gamma)}f(z):=\int_{\mathbb{D}}K^{(\gamma-1)}(w,z)f(w)\overline{\varphi(w)}dV_{\gamma-1}(w)$$

とおく [*3]．little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}^{(\gamma)}=h_{\overline{\varphi}}$ の定義域と値域を Bloch 型空間として考えた際に以下の結果を得た．

定理 2（[6]） $\alpha,\beta,\gamma>0$ は $\gamma-\alpha>-1,\gamma-\beta>-1$ をみたし，$\varphi\in A^1_{\gamma-1}$ とする．

(1) $0<\alpha<1$ のとき，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}:\mathcal{B}^\alpha\to\overline{\mathcal{B}^\beta}$ が有界であるための必要十分条件は $\varphi\in\mathcal{B}^\beta$ である．

(2) $\alpha=1$ のとき，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}:\mathcal{B}^\alpha\to\overline{\mathcal{B}^\beta}$ が有界であるための必要十分条件は $\varphi\in\mathcal{LB}^\beta$ である．

(3) $\alpha>1$ のとき，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}:\mathcal{B}^\alpha\to\overline{\mathcal{B}^\beta}$ が有界であるための必要十分条件は $\varphi\in\Lambda_{\alpha-\beta}$ である．

さらに，次のノルムの同値性が成立する．

$$\|h_{\overline{\varphi}}\|\sim\begin{cases}\|\varphi\|_{\mathcal{B}^\beta} & \text{if}\ \ 0<\alpha<1,\\ \|\varphi\|_{\mathcal{LB}^\beta} & \text{if}\ \ \alpha=1,\\ \|\varphi\|_{\Lambda_{\alpha-\beta}} & \text{if}\ \ \alpha>1.\end{cases}$$

また，定義域，値域を $\mathcal{LB}^\alpha$ とした際の $h_{\overline{\varphi}}$ の有界性の特徴づけ問題についても以下の結果を得た．ここでは，重みを考慮しない $\alpha=1$ の logarithmic Bloch 空間のときの簡易な主張のみ書く．

定理 3（[7]） $\varphi\in A^1$ とする．little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}:\mathcal{LB}\to\overline{\mathcal{LB}}$ が有界であるための必要十分条件は φ が条件

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left(\log\frac{e}{1-|z|^2}\right)\left(\log\log\frac{e^e}{1-|z|^2}\right)|\varphi'(z)|<\infty$$

をみたすことである．

定理 2 と定理 3 の証明について軽くふれる．必要条件は Zhu[10] で得られている Bloch 型関数の性質を使ってスタンダードな評価を行うことで証明できる．十分条件については良いテスト関数をとることを考える．すなわち，little Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi}}$ が性質

$$\langle\overline{h_{\overline{\varphi}}f},g\rangle=\int_{\mathbb{D}}\overline{f(w)g(w)}\varphi(w)dV_\gamma(w)\quad(f,g\in H^\infty)$$

を持つことから上記の式の f,g に“良い関数”をあてがうことで φ の性質を導く．

[*3] index の使い方が論文と違うためやや不自由な記号になっている感は否めない．

3 bianalytic 関数の複素共役をシンボルとする Hankel 作用素

本節では，空間には重みを課さず Hankel 作用素のシンボル関数として bianalytic 関数の複素共役を採用した際に Axler[1] のような特徴づけが得られるかをみる．ここで，n-analytic 関数を $\overline{\partial}^n\varphi = 0$ をみたす関数とし $n = 2$ のとき bianalytic 関数と呼ぶこととする．n-analytic 関数 φ は n 個の正則関数 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ を用いて $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z) + \cdot + \overline{z}^{n-1}\varphi_{n-1}(z)$ と表示される．今回の話に関してはここから境界との距離に関する形に変形して，

$$\varphi(z) = \psi_0(z) + p_{0,n-1}(\overline{z}) + (1-|z|^2)(\psi_1(z) + p_{1,n-2}(\overline{z})) + \cdots + (1-|z|^2)^{n-1}\psi_{n-1}(z) \tag{3}$$

と表示しておく．ここで $p_{j,k}(\overline{z})$ は $\overline{z}$ についての k 次の多項式であり，$\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$ は正則関数である．このとき，表示 (3) は多調和関数における Almanzi 分解になっていることにも注意する．通常の Almanzi 分解は星形領域における原点からの距離を用いるが単位円の形状から境界からの距離 $(1-|z|^2)$ を用いての表示ができている．この表示自体は，Pavlović[4] でも見受けられる．

L^p ノルムが有限な n-analytic 関数の成す空間を $A^{p,n}$ と書くことにする．n-analytic 関数も拡張した平均値の不等式を持つことから，$A^{2,n}$ は再生核 Hilbert 空間である．この空間の再生核を $K_n(z,w)$ と書くことにする．再生核の explicit な表示は

$$K_n(z,w) = \frac{n}{(1-z\overline{w})^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} \binom{n+j}{n} |1-z\overline{w}|^{2(n-1-j)} |z-w|^{2j}$$

となることが知られている（例えば Balk[2] を参照）．

L^2 から $A^{2,n}$ への直交射影を P_n とすると，

$$P_n f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_n(z,w) f(w) dV(w)$$

と書ける．$\overline{A^{2,n}} := \{\overline{f} : f \in A^{2,n}\}$ とおくとこの空間も再生核 Hilbert 空間であり，L^2 から $\overline{A^{2,n}}$ への直交射影 $\overline{P_n}$ は

$$\overline{P_n} f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_n(w,z) f(w) dV(w)$$

と書ける．middle Hankel 作用素 $h_{\varphi,n}$ を $h_{\varphi,n} f = \overline{P_n}[\varphi f]$ $(f \in A^2)$ として定義する．$\overline{P_1} \leq \overline{P_n}$ であり，Q_n を L^2 から $span\{1, z, \cdots, z^{n-1}\}$ への射影とすると $\overline{P_n} - Q_n \leq I - P_1$ が成立する [*4]．$n = 2$ のとき, bianalytic 関数の複素共役をシンボルとした middle Hankel 作用素 $h_{\overline{\varphi},2}$ について次の定理を得た．

[*4] そのため，middle Hankel 作用素という名前をつけた．middle という表現自体は Peng-Rochberg-Wu[5] で用いられている．その論文では little Hankel 作用素と Hankel 作用素の間の一般の作用素に対してこの名称をつけている．

定理 4（[8]）　$\varphi \in A^{2,2}$ として，

$$\varphi(z) = \psi_0(z) + a\overline{z} + (1 - |z|^2)\psi_1(z)$$

と (3) による表示をしておく．このとき，$h_{\overline{\varphi},2} : A^2 \to \overline{A^{2,2}}$ が有界であるための必要十分条件は $\psi_0 \in \mathcal{B}$ かつ $\psi_1 \in \mathcal{B}^2$ である．

条件：$\psi_0 \in \mathcal{B}$ かつ $\psi_1 \in \mathcal{B}^2$ は φ を Bloch 関数のパートと有界関数のパートに分解していることにもなっている [*5]．そのため，この条件が成り立つとき Hankel 作用素は有界である．一方で，Hankel 作用素が有界であれば構成から middle Hankel 作用素が有界であり，先の定理から φ についての条件が現れる．すなわち次の系が与えられる．

系 1　$\varphi \in A^{2,2}$ として，

$$\varphi(z) = \psi_0(z) + a\overline{z} + (1 - |z|^2)\psi_1(z)$$

と (3) による表示をしておく．このとき，$H_{\overline{\varphi}} : A^2 \to (A^2)^{\perp}$ が有界であるための必要十分条件は $\psi_0 \in \mathcal{B}$ かつ $\psi_1 \in \mathcal{B}^2$ である．

以上から，$\psi_0 \in \mathcal{B}$ かつ $\psi_1 \in \mathcal{B}^2$ という条件は bianalytic Bloch 関数の定義にふさわしいと思われる．同じ方法で n-analytic 関数の成す Bloch 型の関数や多調和 Bloch 関数の特徴づけができるのではないかと考えているところである．

参考文献

[1] S. Axler, *The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators*, Duke Math. J. **53** (1986), 315–332.

[2] M. B. Balk, *Polyanalytic functions*, Akademie Verlag, Berlin(1991).

[3] A. Bonami and L. Luo, *On Hankel operator between Bergman spaces on the unit ball*, Houston J. Math. **31** (2005), 815–828.

[4] M. Pavlović, *Decomposition of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **216** (1997), 499–509.

[5] L. Peng, R. Rochberg and J. Wu, *Orthogonal polynomials and middle Hankel operators on Bergman spaces*, Studia Math. **102** (1992), no.1. 57–75.

[6] K. Tanaka and S. Yamaji, *Little Hankel operators from Bloch type spaces into another*, Adv. Oper. Theory **10** (2025), no.1, Paper No.18, 21pp.

[7] K. Tanaka and S. Yamaji, *Little Hankel operators on logarithmic Bloch type spaces*, submitted.

[8] K. Tanaka and S. Yamaji, *Middle Hankel operators with respect to bi-analytic functions*, preparation.

[*5] 更に書くと，ψ_0 は bounded oscillation(BO) であり，残りのパートは絶対値を取って 2 乗したものの平均関数が有界 (BA) ともみれる

[9] Z. Wu, R. Zhao and N. Zorboska, *Toeplitz operators on Bloch-type spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3531–3542.

[10] K. Zhu, *Bloch type spaces of analytic functions*, Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), no. 3, 1143–1177.