リーマン領域の局所 Stein 性とコホモロジー的条件

杉山 俊 *(北九州高専)

1　序文

コホモロジー的条件から Stein 性，局所 Stein 性を導出する定理は多くある．Serre [44] により，$\mathbb{C}^n$ 内の開集合 D について，$H^k(D,\mathcal{O}_D)=0$ $(1\le k\le n-1)$ のとき，D は Stein である．Laufer [31] により，n 次元 Stein 多様体 X の上の正則分離を仮定した Riemann 領域 (D,π) について，$H^k(D,\mathcal{O}_D)=0$ $(1\le k\le n-1)$ のとき，D は Stein である．Siu [45, Theorem B] により，n 次元 Stein 多様体 X の上の Riemann 領域 (D,π) について，$1\le k\le n-1$ に対し $H^k(D,\mathcal{O}_D)$ の代数的次元が高々可算無限ならば，D は Stein である．

また，他のコホモロジー的条件から Stein 性を導出する研究群があり，Kajiwara–Kazama [26] により，2 次元 Stein 多様体内の領域 D について，正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathcal{O}^G)=0$ ならば，D は Stein である．Mori [36] により，n 次元 Stein 多様体内の領域 D について，$H^k(D,\mathcal{O}_D)=0$ $(2\le k\le n-1)$ かつ正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathcal{O}^G)=0$ ならば，D は Stein である．

さらに，Oka-Grauert の原理による Stein 性の特徴付けに関連する定理が示された．ここで，被約解析空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ が複素 Lie 群 G に関して **Oka-Grauert の原理を満たす**とは，標準写像 $H^1(X,\mathcal{O}^G)\to H^1(X,\mathcal{C}^G)$ が単射のこと指す (Leiterer [32] もしくは Forstnerič [15] 参照). Kajiwara–Nishihara [27] により，2 次元 Stein 多様体内の領域 D について，正の次元の複素 Lie 群 G が存在して, $H^1(D,\mathcal{O}^G)\to H^1(D,\mathcal{E}^G)$ が準単射ならば, D は Stein である．Kajiwara [24] により, $\mathbb{P}^2$ 内の真部分領域 D について, 正の次元の複素 Lie 群 G が存在して, $H^1(D,\mathcal{O}^G)\to H^1(D,\mathcal{E}^G)$ が準単射ならば，D は Stein である．さらに，Abe [2, Theorem 8] は，純 n 次元 Stein orbifold 内の領域 D について，$H^k(D,\mathcal{O}_D)=0$ （$2\le k\le n-1$) かつ正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathcal{O}^G)\to H^1(D,\mathcal{E}^G)$ が準単射ならば，D は任意の $p\in\partial D$ において局所 Stein であることを証明した．また, Leiterer [32] により, Stein 多様体内の領域 D において, $H^1(D,\mathcal{O}_D)=0$ かつ任意の $r\in\mathbb{N}$ に対し $\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ について $H^1(D,\mathcal{O}^{\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})})\to H^1(D,\mathcal{E}^{\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})})$ が準単射ならば，D は Stein である．Kajiwara [25] により，Stein 多様体 S 内の連続な境界をもつ領域 D について，正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，S 内の任意の解析的多重円板 P に対し $H^1(D\cap P,\mathcal{O}^G)\to H^1(D\cap P,\mathcal{E}^G)$ が準単射ならば，D は Stein である．

* Email: math.s.sugiyama@gmail.com

Oka-Grauert の原理とは別のコホモロジー的条件から Stein 性を導出するものもある．Gunning [20, pp. 122–125] により，被約 Stein 空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ 上の任意の正則直線束 L はある Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ により定まると示された．この逆問題に関して次のことが知られている．Abe [1] により，2 次元 Stein 多様体内の領域 D について，D 上の任意の正則直線束 L がある Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ により定まるなら D は Stein である．さらに，Ballico [10] により，Andreotti–Grauert の意味で weakly 2-convex 関数 $\varphi : S \to \mathbb{R}$ によって $D = \{\varphi < c\}$ と表される次元 2 以上な Stein 多様体 S 内の開集合 D について，D 上の任意の正則直線束 L がある Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ により定まるなら D は Stein である．また，この結果はさらに一般化され，Abe [3] により，純 n 次元 Stein orbifold 内の開集合 D で，$H^k(D,\mathcal{O}_D) = 0$ $(2 \le k \le n-1)$ かつ，D 上の位相的自明な正則直線束 L がある Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ により定まるなら D は任意の $p \in \partial D$ において局所 Stein である. この任意の位相的自明な正則直線束がある Cartier 因子により定まるという条件は，$\mathrm{Pic}^0(D)$ を位相的自明な正則直線束全体の集合とすれば，$\mathrm{Pic}^0(D) \subset \mathrm{Im}\big([\cdot]_D : \mathrm{Div}(D) \to H^1(D,(\mathcal{O}_{\mathrm{red}D})^*)\big)$ と表現することができる．

上記のような先行研究を踏まえ，本稿では次の状況における Riemann 領域 (D,π) の局所 Stein 性を考察する．$H^k(D,\mathcal{O}_D) = 0$ $(2 \le k \le n-1)$ を満たす n 次元 Stein 多様体 S，あるいは，特異点が離散的な Stein 空間 $(S,\mathcal{O}_S)$ の上の Riemann 領域 (D,π) を考え，次の 2 条件 (O) もしくは (C) の**いずれか一方**を満たすと仮定する:

(O) ある正の次元の複素 Lie 群 G に対して，標準写像 $H^1(D,\mathcal{O}^G) \to H^1(D,\mathcal{E}^G)$ が準単射である．

(C) $\mathrm{Pic}^0(D) \subset \mathrm{Im}\big([\cdot]_D : \mathrm{Div}(D) \to H^1(D,(\mathcal{O}_{\mathrm{red}D})^*)\big)$.

この仮定の下で，Riemann 領域 (D,π) の局所 Stein 性がどのように導かれるかを解説する．特に，Abe–Sugiyama [7] と Sugiyama [49] に基づいた Riemann 領域 (D,π) に対する貼り合わせ法を中心に述べる．この貼り合わせ法は Kajiwara–Kazama [26] の論法を拡張したものであり，上記 2 つの条件 (O) と (C) を並列して取り扱うのは，いずれの場合にも，この貼り合わせ法が有効だからである．

各章の内容は次のとおりである．まず，第 2 章では序文で述べたコホモロジー的条件の定義を整理する．第 3 章では Riemann 領域とその境界の定義と弱 q-擬凸性，局所 Stein 性の定義とその性質を述べる．第 4 章では Riemann 領域の貼り合わせ法について解説し，第 5 章ではそれを応用し，条件 (O) を満たす n 次元 Stein 多様体の上の Riemann 領域 (D,π) を考察する．第 6 章では条件 (C) を満たす特異点が離散的な Stein 空間の上の Riemann 領域 (D,π) を考察する．第 7 章では，Cousin-I 性に注目して関連するいくつかの結果を述べる．

2　準備

考察する解析空間は常に第 2 可算を仮定する. 解析空間 X の構造層を $\mathcal{O}_X$ と書く. $(X,\mathcal{O}_X)$ が被約解析空間のとき, 有理型関数のなす X 上の層を $\mathcal{M}_X$ と書き, 複素 Lie 群 G に値をもつ正則写像，連続写像，滑らか写像の層をそれぞれ $\mathcal{O}^G$, $\mathcal{C}^G$, $\mathcal{E}^G$ と書く．X を位相空間，$\mathcal{U} = \{U_i\}$ を X の開被覆，$\mathscr{F}$ を X 上の群の層とする．コサイクル $\{f_{ij}\},\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ について，コチェイン

$\{h_i\} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ が存在して，$U_i \cap U_j$ 上で $f_{ij} = h_i^{-1} g_{ij} h_j$ が成り立つとき，$\{f_{ij}\} \sim \{g_{ij}\}$ と書くことにする．このとき，**1 次コホモロジー集合**を次のように定義する (例えば Leiterer [32] 参照) :

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})/\sim \quad (\text{商集合}),$$
$$H^1(X, \mathscr{F}) := \varinjlim H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \quad (\text{帰納的極限}).$$

このとき，自然な写像 $H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F})$ は単射である．コホモロジー集合の元を**コホモロジー類**といい，コサイクル $\{1_{U_i \cap U_j}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ の定める $H^1(X, \mathscr{F})$ のコホモロジー類 $1_{\mathscr{F}}$ を**中立元** (neutral element) という．

X を位相空間，$\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を X 上の群の層，$\lambda : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を準同型とする．λ から導かれる写像 $\lambda^* : H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{G})$ について，$(\lambda^*)^{-1}(1_{\mathscr{G}}) = \{1_{\mathscr{F}}\}$ のとき，λ^* は**準単射** (quasi-injective) であるという (Kajiwara [24, 25] 参照). $(X, \mathcal{O}_X)$ を被約解析空間, G を複素 Lie 群とするとき, 標準写像 $H^1(X, \mathcal{O}^G) \to H^1(X, \mathcal{C}^G)$ が準単射であるという条件は, D 上の正則主 G 束が位相的に自明ならば正則的にも自明であることを意味する．

$(X, \mathcal{O}_X)$ を必ずしも被約とは限らない解析空間とし，$\mathrm{red} : (X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ を被約化写像とする．$(X, \mathcal{O}_X)$ を解析空間とし，$e : \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X} \to (\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*$ を X 上の層の準同型で， 各 $x \in X$ と $f_x \in \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X, x}$ に対して $e_x(f_x) := \exp(2\pi\sqrt{-1} f_x)$ と定義する．ただし $(\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*$ は正則関数の逆元の芽全体からなる可逆的層を表す．

すると e は準同型 $e^* : H^1(X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X}) \longrightarrow H^1(X, (\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*)$ を誘導する．一般に, コホモロジー群 $H^1(X, (\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*)$ は $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の正則直線束の集合と同一視できる. 便宜のため，次の写像の合成の像を $\mathrm{Pic}^0(X)$ と記すことにする：

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{red}^*} H^1(X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X}) \xrightarrow{e^*} H^1(X, (\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*).$$

被約解析空間 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})$ 上の Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ とは $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})$ 上の Cousin-II 分布 $\{(U_i, m_i)\}_{i \in I}$ のことを指す (Gunning [20, p. 121] 参照). $\{m_i/m_j\} \in Z^1(\{U_i\}_{i \in I}, (\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*)$ により定まる正則直線束を $[\mathfrak{d}]_X$ と書き，これを $\mathfrak{d}$ に**付随する正則直線束** という. $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})$ 上のすべての Cartier 因子全体の集合を $\mathrm{Div}(X)$ と表す. この記法のもとで，$[\cdot]_X : \mathrm{Div}(X) \to H^1(X, (\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*)$ と書くことができる. また，解析空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して，任意の位相的自明な正則直線束がある Cartier 因子から定まるという条件は，$\mathrm{Pic}^0(X) \subset \mathrm{Im}\big([\cdot]_X : \mathrm{Div}(X) \to H^1(X, (\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X})^*)\big)$ と表現することができる．

3 Riemann 領域

$(X, \mathcal{O}_X)$ を解析空間とする．第 2 可算 Hausdorff 空間 D と局所同相写像 $\pi : D \to X$ の対 (D, π) を $(X, \mathcal{O}_X)$ の上の (不分岐) **Riemann 領域**という．このとき，$\mathcal{O}_D := \pi^*(\mathcal{O}_X)$ とおけば，$(D, \mathcal{O}_D)$ は解析空間になる (例えば，Kaup–Kaup [29, pp. 96–97] 参照). (D, π) を $(X, \mathcal{O}_X)$ の上の Riemann 領域とする．次の 3 条件をみたす D 上のフィルター基 α を (D, π) の（到達可能）**境界点**という (Docquier–Grauert [13] 参照):

- α は触点をもたない．

- 点 $c \in X$ が存在して，X において $\lim \pi(\alpha) = c$.
- c の任意の連結 (開) 近傍 U に対して，$\pi^{-1}(U)$ の連結成分 C_U が唯一つ存在して，

$$\alpha = \{C_U \,;\, U \text{ は } c \text{ の連結近傍}\}.$$

さらに，α が上記の 3 条件を満たし，さらに次の条件を満たすとき，α を (D,π) の**通常境界点**という.

- $\lim \pi(\alpha)$ が $(X, \mathcal{O}_X)$ の通常点である.

Riemann 領域 (D,π) の境界点全体の集合を $\check{\partial} D$ と書く．これを (D,π) の**抽象境界**という．同様に，(D,π) の通常境界点全体の集合を $\check{\partial}_r D$ と書く．集合 $\check{D} := D \cup \check{\partial} D$ を (D,π) の**抽象閉包**という.

写像

$$\check{\pi} : \check{D} \to X, \qquad \check{\pi}(x) := \begin{cases} \pi(x) & (x \in D), \\ \lim \pi(x) & (x \in \check{\partial} D), \end{cases}$$

を π の $\check{D}$ への**拡張**という.

点 $x \in D$ に対しては，$\mathcal{B}(x)$ を x の D における近傍全体とし，点 $x \in \check{\partial} D$ に対しては

$$\mathcal{B}(x) := \{P \cup \{\alpha \in \check{D} \,;\, G \in \alpha \text{ が存在して } G \subset P\} \,;\, P \in x\}$$

と定めることにする．このとき，族 $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}(x) \,;\, x \in \check{D}\}$ は基本近傍系の公理をみたし，集合 $\check{D}$ に位相を定める．この位相のもとで，$\check{D}$ は正則空間であり，写像 $\check{\pi}$ は連続である.

$\mathbb{C}^n$ の Euclid ノルムを $\|\cdot\|$ と書く. 集合 $\mathsf{B}_n(c,r) := \{z \in \mathbb{C}^n \,;\, \|z - c\| < r\}$ を中心 c，半径 r の球とし，以下では，省略記号 $\mathsf{B}_n(r) := \mathsf{B}_n(0,r), \mathsf{B}_n := \mathsf{B}_n(1), \mathsf{U} := \mathsf{B}_1(1)$ を用いる.

(D,π) を $\mathbb{C}^n$ の上の Riemann 領域とする．任意の $x \in D$ に対して，x の近傍 B が存在して $\pi(B) = \mathsf{B}_n(\pi(x),\rho)$ かつ $\pi|_B : B \to \mathsf{B}_n(\pi(x),\rho)$ が双正則であるような $\rho \in (0,+\infty]$ の上限を $d_D(x)$ と書き，関数 $d_D : D \to (0,+\infty]$ を Euclid ノルム $\|\cdot\|$ に関する (D,π) の **境界距離関数**という．D が連結かつ π が双正則でないとき，任意の $x \in D$ に対し $d_D(x) < +\infty$ であり，関数 $d_D : D \to (0,+\infty)$ は連続である.

$\mathbb{C}^n$ の開集合 D 上の上半連続関数 $h : D \to [-\infty,+\infty)$ について, $G \Subset D$ をみたす任意の開集合 G と $\overline{G}$ の近傍で定義された任意の (実数値) 多重調和関数 h に対して, ∂G 上で $u \le h$ ならば G 上でも $u \le h$ であるとき, u は D で (藤田の意味で) **劣多重調和** (subpluriharmonic) であるという (Fujita [16, 17] 参照).

$(X, \mathcal{O}_X)$ を n 次元被約解析空間，$u : X \to [-\infty,+\infty)$ を上半連続関数，$1 \le q \le n$ とする．$\mathbb{C}^q$ の任意の開集合 G と任意の正則写像 $f : G \to X$ に対して，関数 $u \circ f : G \to [-\infty,+\infty)$ が劣多重調和のとき，u は **(弱)q-多重劣調和**であるという（Popa-Fischer [43] 参照)．特に，$q = 1$ のとき，u は**多重劣調和**であるという.

$\mathbb{C}^n$ の上の Riemann 領域 (D,π) に対して，関数 $-\log d_D$ が D 上で q-多重劣調和のとき，(D,π) は **q-擬凸**であるという（$1 \le q \le n$)．特に，$q = 1$ のとき，**擬凸**であるという．Oka [41] の定理に

より，$\mathbb{C}^n$ の上の Riemann 領域 (D,π) について，D が Stein であることは (D,π) が擬凸であることと同値である．

n 次元被約解析空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ について，弱 q-多重劣調和な exhaustion 関数 $u : X \to [-\infty,+\infty)$ が存在するとき，X は**弱 q-擬凸**であるという（$1 \leq q \leq n$）．特に，$q=1$ のとき，**弱擬凸**であるという．Matsutomo [35] により，$\mathbb{C}^n$ 上の Riemann 領域 (D,π) について，D が弱 q-擬凸であることは (D,π) が q-擬凸であることと同値である．

写像 $\psi = (\psi_1,\ldots,\psi_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ について，$\psi_k(z) \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ かつ $\deg \psi_k \leq 2$ $(k=1,2,\ldots,n)$ のとき，ψ を **quadratic** であるという．ψ が全単射かつその逆写像 ψ^{-1} も quadratic であるとき，その ψ を $\mathbb{C}^n$ の **quadratic automorphism** という．

定理 3.1 (cf. Abe–Shima–Sugiyama [6, Theorem 4.1])**.** (D,π) を $\mathbb{C}^n$ の上の q-擬凸でない Riemann 領域とする（$1 \leq q \leq n-1$）．このとき，写像 $\psi = (\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$D$ の連結開集合 W，および $\check{o} \in \check{\partial} D$ が存在して，次の 5 条件が満たされる:

(1) $H := \psi\big(\mathbb{C}^{q+1} \times \{0\}\big)$ は $\mathbb{C}^n$ の $q+1$ 次元アフィン部分空間である．

(2) ψ は quadratic automorphism であり，各 ψ_k は次の形である $(k=1,2,\ldots,n)$.

$$\psi_k(z_1,z_2,\ldots,z_n) = P_k(z_1,z_2,\ldots,z_q) + \sum_{\ell=q+1}^{n} c_{k\ell}\, z_\ell,$$

ここで $P_k(z_1,\ldots,z_q) \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_q]$, $\deg P_k(z_1,\ldots,z_q) \leq 2$，$c_{k\ell} \in \mathbb{C}$ $(\ell = q+1, q+2, \ldots, n)$.

(3) $\pi(W)$ は $\mathbb{C}^n$ の開集合であり，かつ $\pi|_W : W \to \pi(W)$ は双正則である．

(4) $\psi\big((\overline{\mathsf{Z}} \setminus \{(0_q,0)\}) \times \{0_{n-q-1}\}\big) \subset \pi(W)$，ただし $\mathsf{Z} := \mathsf{B}_q \times [0,1)$.

(5) 写像

$$\check{\lambda} : \overline{\mathsf{Z}} \to \check{D}, \qquad (\zeta,t) \mapsto \begin{cases} \big(\pi|_W\big)^{-1}\big(\psi(\zeta,t,0_{n-q-1})\big) & \big((\zeta,t) \in \overline{\mathsf{Z}} \setminus \{(0_q,0)\}\big), \\ \check{o} & \big((\zeta,t) = (0_q,0)\big) \end{cases}$$

は連続である．

この定理は，Abe–Shima–Sugiyama [6] のわずかな改良であり，境界に 1 点だけで接するような解析的球体族の存在が言える．これを Stein 空間の上の領域に拡張する．ただし，以下では $q=1$ の場合のみを取り扱う．

補題 3.2. $(S,\mathcal{O}_S)$ を必ずしも被約とは限らない n 次元 Stein 空間とする．このとき，任意の $a \in \mathrm{Reg}(S,\mathcal{O}_S)$ に対して，次の 2 条件をみたす正則写像 $f : S \to \mathbb{C}^n$ が存在する:

(1) 任意の $c \in \mathbb{C}^n$ に対して，集合 $f^{-1}(c)$ は離散的である．

(2) S における a の近傍 V が存在して，$f(V)$ は $\mathbb{C}^n$ の開集合であり，かつ $f|_V : V \to f(V)$ は双正則である．

Riemann 領域 (D,π) が境界点 $\alpha \in \check{\partial} D$ に対して，**局所 Stein** であるとは，ある $C_U \in \alpha$ が存在して，C_U が Stein となることである．

補題 3.3. $(S,\mathcal{O}_S)$ を必ずしも被約とは限らない純 n 次元 Stein 空間で $n \geq 2$ とする．(D,π) を $(S,\mathcal{O}_S)$ の上の Riemann 領域とし，(D,π) はある $\alpha \in \check{\partial}_r D$ に対して，局所 Stein でないと仮定する．このとき，正則写像 $\theta : S \to \mathbb{C}^n$，$S$ の連結 Stein 開集合 Ω，D の連結開集合 W，および $\check{o} \in \check{\partial}_r D$ が存在して，次の 7 条件が満たされる:

(1) 任意の $c \in \mathbb{C}^n$ に対して，集合 $\theta^{-1}(c)$ は離散的である．

(2) $\theta(\Omega)$ は $\mathbb{C}^n$ の開集合であり，かつ $\theta|_\Omega : \Omega \to \theta(\Omega)$ は双正則である．

(3) $\pi(W)$ は S の開集合であり，かつ $\pi|_W : W \to \pi(W)$ は双正則である．

(4) $\pi(W) \subset \Omega$.

(5) $\overline{\mathsf{Z}} \times \{0_{n-2}\} \subset \theta(\Omega)$，ただし $\mathsf{Z} := \mathsf{U} \times [0,1)$.

(6) $(\theta|_\Omega)^{-1}\big(\overline{\mathsf{Z}} \setminus \{(0,0)\}\big) \times \{0_{n-2}\} \ \subset\ \pi(W)$.

(7) 写像

$$\check{\lambda} :\ \overline{\mathsf{Z}} \to \check{D}, \quad (\zeta,t) \longmapsto \begin{cases} \big(\pi|_W\big)^{-1}\Big((\theta|_\Omega)^{-1}\big(\zeta,t,0_{n-2}\big)\Big) & \big((\zeta,t) \in \overline{\mathsf{Z}} \setminus \{(0,0)\}\big), \\ \check{o} & \big((\zeta,t) = (0,0)\big) \end{cases}$$

は連続である．

4 貼り合わせ法

前の章で存在が示された解析的円板族の存在から，Abe–Sugiyama [7, pp.15–18] の議論を用いて，次のことを示すことができる．記号として，$\mathsf{A}(r_1,r_2) := \{\zeta \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |\zeta| < r_2\}$ を用いる．

補題 4.1. $(S,\mathcal{O}_S)$ を必ずしも被約とは限らない純 n 次元 Stein 空間で $n \geq 2$ とする．(D,π) を $(S,\mathcal{O}_S)$ の上の Riemann 領域とし，(D,π) はある $\alpha \in \check{\partial}_r D$ に対して，局所 Stein でないと仮定する．このとき，

- fiber discrete な正則写像 $\theta : S \to \mathbb{C}^n$,
- Stein 開集合 $\Omega \subset S$, 開集合 $W, W', W'', N \subset D$,
- 実数 $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$, $0 < \delta_0 < 1$,

が存在して, $\xi := \theta \circ \pi$ とおくことで，次の 11 条件が満たせる:

(1) $\theta|_\Omega : \Omega \to \theta(\Omega)$ は双正則である．

(2) $\mathsf{B}_1(\rho_2) \times \mathsf{B}_1(\delta_0)^{n-1} \subset \theta(\Omega)$.

(3) $\xi|_W : W \to \xi(W)$ は双正則で $\xi(W) \subset \theta(\Omega)$.

(4) $\Big(\overline{\mathsf{Z}} \setminus \{(0,0)\}\Big) \times \{0_{n-2}\} \subset \xi(W)$.

(5) $\xi^{-1}(0_n) \cap W = \emptyset$.

(6) $\big(\xi^{-1}(\mathsf{Z} \times \{0_{n-2}\}) \cap W\big) \cup \big(\xi^{-1}\big(\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2) \times \mathsf{B}_1(\delta_0)^{n-1}\big) \cap W\big) \subset W'$.

(7) $\xi^{-1}(\mathsf{Z} \times \{0_{n-2}\}) \setminus W \subset W''$.

(8) $\overline{W'} \cap \xi^{-1}(\mathsf{U}^n) \subset W \cap \xi^{-1}(\mathsf{U}^n)$.

(9) $\overline{W'}\cap\overline{W''}\cap\xi^{-1}(\mathsf{U}^n)=\emptyset$.

(10) N は Stein である.

(11) $\xi^{-1}(\mathbb{C}\times\{0_{n-1}\})\subset N\subset W'\cup W''\cup\xi^{-1}(\overline{\mathsf{B}_1(\rho_3)\times\mathsf{B}_1(\delta_0)^{n-1}}^{\mathsf{C}})$, 但し，$\rho_3=(1+\rho_2)/2$.

この 11 条件を満たせば, 境界局所的に貼り合わせを行って，新たな Riemann 領域を構成できる．(D,π) は純 n 次元 Stein 空間の上の Riemann 領域で，補題 4.1 の 11 条件を満たすとする．$(\xi|_W)^{-1}(\overline{\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)}\times\{0_{n-1}\})\subset\xi^{-1}(\mathbb{C}\times\{0_{n-1}\})$ だから，ある $\delta\in(0,\delta_0)$ が存在して，$(\xi|_W)^{-1}(\overline{\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)}\times\overline{\mathsf{B}_1(\delta)}^{n-1})\subset N$ とできる．

$$A:=\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta)^{n-1},\quad P:=\mathsf{B}_1(\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta)^{n-1},$$
$$P':=W'\cap\xi^{-1}(P),\quad P'':=W''\cap\xi^{-1}(P),\quad R:=\xi^{-1}(\mathbb{C}\times\mathsf{B}_1(\delta)^{n-1}),$$
$$A':=(\xi|_W)^{-1}(A),\quad Q:=R\cap N\setminus\Big(\overline{P'}\cap\xi^{-1}(\overline{\mathsf{B}_1(\rho_1)}\times\mathbb{C}^{n-1})\Big).$$

とおく．まず,

$$A'=(\xi|_{P'})^{-1}(A)\subset P',\quad \overline{P'}\subset W,\quad \overline{P'}\cap\overline{P''}=\emptyset,$$
$$P'\cap Q=A',Q=R\cap N\setminus\Big(P'\cap\xi^{-1}(\overline{\mathsf{B}_1(\rho_1)}\times\mathbb{C}^{n-1})\Big)$$

が成り立つ. $D_1:=\big(P'\setminus\{\xi_1=0\}\big)\cup Q$ とおき，$\nu=2,3,\dots,n$ に対して，$D_\nu:=\{\xi_\nu\neq 0\}$ とおく．

補題 4.2 (Abe–Sugiyama [7, Proposition 5.6])**.** $\{D_\nu\}_{\nu=1}^n$ は D の開被覆をあたえる.

次に，P と Q を貼り合わせる．$P\,\dot\cup\,Q$ を P と Q の直和とする．$\sim$ を以下の条件を満たす同値関係で最小のものとする.

- $x\in P$ かつ $y\in Q$ のとき，$x\sim y\Leftrightarrow x\in A,\ y\in A'$ かつ $x=\xi(y)$.

$\widetilde{X}:=(P\,\dot\cup\,Q)/\!\sim$ として，$\mathsf{q}:P\,\dot\cup\,Q\to\widetilde{X},\ x\mapsto[x]$ を商写像とする．q が連続となるように $\widetilde{X}$ に最強の位相を入れる.

補題 4.3 (Abe–Sugiyama [7, Proposition 5.7, 5.8])**.** 次の 3 条件が満たされる:

- 商写像 $\mathsf{q}:P\,\dot\cup\,Q\to\widetilde{X}$ は開写像である.
- $\mathsf{q}|_P:P\to\mathsf{q}(P)$ と $\mathsf{q}|_Q:Q\to\mathsf{q}(Q)$ は位相同型である.
- $\widetilde{X}$ は第 2 可算な Hausdorff 空間である.

次に，$\widetilde{X}$ に被約化を取りやすいような解析構造を入れる．写像 μ を以下のように定義する:

$$\mu:\widetilde{X}\to S,\quad \mu:=\begin{cases}(\theta|_\Omega)^{-1}\circ(\mathsf{q}|_P)^{-1} & \text{on } \mathsf{q}(P),\\ \pi\circ(\mathsf{q}|_Q)^{-1} & \text{on } \mathsf{q}(Q).\end{cases}$$

このとき，μ は局所同相写像になるから，$(\widetilde{X},\mu)$ は $(S,\mathcal{O}_S)$ の上の Riemann 領域になる．さらに，μ は Stein morphism である．なお，解析空間の間の正則写像 $\rho:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ が **Stein morphism** であるとは，Y の Stein 開被覆 $\{U_k\}$ が存在し，任意の k に対して，$\rho^{-1}(U_k)$ が Stein に

なることを言う．Colţoiu–Diederich [12] による特異点が離散的な被約 Stein 空間の上の Riemann 領域での Levi の問題 (Peternell [42] 参照) の解決を用いることで次を得る．

補題 4.4 (cf. Abe–Sugiyama [7, Proposition 6.1])**.** $\mathrm{Sing}(S, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\ S})$ は離散的とする．このとき，$(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ は Stein となる．但し，$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ は μ から定まる標準解析構造である．

補題 4.5 (cf. Abe–Sugiyama [7, Proposition 6.2])**.** $\{D_\nu\}_{\nu=1}^n$, $\widetilde{X}$, P, P' をこの章で定義したものとする．$\mathrm{Sing}(S, \mathcal{O}_{\mathrm{red}\ S})$ は離散的とする．このとき，ある $v \in \mathcal{O}_D(D_1)$ と $v_0 \in \mathcal{O}(P)$ が存在し，P' 上で，$v = 1/\xi_1 + v_0 \circ \xi$ が成立する．

5　条件 (O) の場合

この章では，ある複素 Lie 群に対する Oka-Grauert の原理を満たすという仮定 (O) の場合の証明の概略を述べておく (Abe–Sugiyama [7] 参照)．ここでは，底空間は Stein 多様体で考察する．仮定 (O) の場合はコチェインの次数下げ法を用いる (Laufer [31], Mori [36], Watanabe [51], Abe [2] 参照)．以下の補題 5.1 および 5.2 は，本質的には Kajiwara–Kazama [26] による．$\mathrm{T} := \mathrm{U}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $U_1 := \{(z_1, z_2) \in \mathrm{T}\,;\, z_1 \neq 0\}, U_2 := \{(z_1, z_2) \in \mathrm{T}\,;\, z_2 \neq 0\}$ とおく．

補題 5.1 (Abe [2, Lemma 3.2])**.** $c \in \mathbb{C}^*$ とする．関数 $g := e^{\left(c\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\right)} \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$ に対して，$g \notin B^1(\{U_1, U_2\}, \mathcal{M}_{\mathrm{T}})$ が成り立つ．

$(X, \mathcal{O}_X)$ を被約解析空間, G を複素 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする．このとき, $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^{\dim G}$ とみなすことができて, 指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は正則である．

補題 5.2 (Abe–Sugiyama [7, Lemma 2.6])**.** G を複素 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数，$\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とする．G が可換であるか，あるいは $\mathrm{ad}\,\boldsymbol{v} \neq 0$ であると仮定する．$g \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$ とし，ある $s \in \mathcal{O}(\mathrm{U}^2)$ が存在して $s \neq 0$ かつ $\exp(gs\boldsymbol{v}) \in B^1(\{U_1, U_2\}, \mathcal{O}^G)$ であると仮定する．このとき $g \in B^1(\{U_1, U_2\}, \mathcal{M}_{\mathrm{T}})$ が成り立つ．

$(X, \mathcal{O}_X)$ を被約解析空間とし，$n \geq 2$ とする．X_1, X_2 を X の開集合とする．$n \geq 3$ のときは，$\xi_3, \ldots, \xi_n \in \mathcal{O}(X)$ を与え，$X_\nu := \{\xi_\nu \neq 0\}$,　$3 \leq \nu \leq n$ と定める．さらに次の 2 条件を仮定する:

- $H^k(X, \mathcal{O}_X) = 0$ $(2 \leq k \leq n-1)$.
- $X = \bigcup_{\nu=1}^n X_\nu$.

さらに $\{X_\nu\}_{\nu=1}^n$ の細分である Stein 開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとり，$\alpha : \Lambda \to \{1, 2, \ldots, n\}$ をその細分写像とする．これにより誘導される準同型 $\alpha^* : C^1(\{X_\nu\}_{\nu=1}^n, \mathcal{O}_X) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ を考える．このとき，コチェインの次数下げ補題が成り立つ．

補題 5.3 (Abe [2, Corollary 5.3])**.** 任意の $h \in \mathcal{O}(X_1 \cap X_2)$ をとり，

$$\eta^{(3\cdots n)} = \left\{\eta^{(3\cdots n)}_{\nu_1 \nu_2}\right\} \in C^1(\{X_\nu\}_{\nu=1}^n, \mathcal{O}_X)$$

を次で定める：

$$\eta^{(3\cdots n)}_{\nu_1\nu_2} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)+(3+\cdots+n)}h & if\,(\nu_1,\nu_2)=(1,2), \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

ただし $1 \le \nu_1 < \nu_2 \le n$．このとき，$3 \le \kappa \le n$ に対して $f^{(3\cdots\cancel{\kappa}\cdots n)} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ が存在し，

$$u^{(3\cdots n)} := -\sum_{\kappa=3}^{n}(-1)^{\kappa-3}\xi_\kappa f^{(3\cdots\cancel{\kappa}\cdots n)} + \alpha^*(\eta^{(3\cdots n)}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$$

となる．

$(X,\mathcal{O}_X)$ を被約解析空間, G を複素 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする．任意の $v \in \mathfrak{g}$ に対して, 写像 $\Phi^{G,v} : H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}^G)$ を次のように定義する：

コサイクル $\{h_{ij}\} \in Z^1(\{U_i\},\mathcal{O}_X)$ の定める $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ のコホモロジー類 c に対して, コサイクル $\{\exp(h_{ij}v)\} \in Z^1(\{U_i\},\mathcal{O}^G)$ の定める $H^1(X,\mathcal{O}^G)$ のコホモロジー類を $\Phi^{G,v}(c)$ とする．

補題 5.4 (Abe [2, Lemma 2.2])**.** $(X,\mathcal{O}_X)$ を被約解析空間, G を複素 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする．標準写像 $H^1(X,\mathcal{O}^G) \to H^1(X,\mathcal{E}^G)$ が準単射ならば, 任意の $v \in \mathfrak{g}$ と $c \in H^1(X,\mathcal{O}_X)$ に対して, $\Phi^{G,v}(c)$ は $H^1(X,\mathcal{O}^G)$ の中立元である．

以下の補題 5.5 は背理法による．局所 Stein でないと仮定すれば，第 4 章にある貼り合わせ法が使えて，コチェインの次数下げ補題 5.3 が使えるような開被覆 $\{D_\nu\}_{\nu=1}^n$ と関数 $h \in \mathcal{O}(D_1 \cap D_2)$ が構成できる．それらを $\{\xi_3 = \cdots = \xi_n = 0\}$ に制限することで，補題 5.1 と補題 5.2 に矛盾する状況に到達する．

補題 5.5 (Abe–Sugiyama [7, Lemma 4.3])**.** S を n 次元 Stein 多様体, (D,π) を S の上の Riemann 領域, G を正の次元の複素 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環, $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ とする．G が可換であるか，あるいは $\mathrm{ad}\,\boldsymbol{v} \neq 0$ であると仮定する．次の 2 条件を仮定する:

- $H^k(D,\mathcal{O}_D) = 0$ $(2 \le k \le n-1)$.
- 任意の $c \in H^1(D,\mathcal{O}_D)$ に対して, $\Phi^{G,v}(c)$ は $H^1(D,\mathcal{O}^G)$ の中立元である．

このとき, D は局所 Stein である．

補題 5.4, 5.5 と Docquier–Grauert の定理 [13] から次の定理が得られる．

定理 5.6 (Abe–Sugiyama [7, Theorem 7.1])**.** S を n 次元 Stein 多様体, (D,π) を S の上の Riemann 領域とし，次の 2 条件を仮定する:

- $H^k(D,\mathcal{O}_D) = 0$ $(2 \le k \le n-1)$.
- 正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D,\mathcal{O}^G) \to H^1(D,\mathcal{E}^G)$ は準単射である．

このとき, D は Stein である．

注意 5.7. Ballico [8, 9] により，定理 5.6 の条件「$H^k(D,\mathcal{O}_D) = 0$ $(2 \le k \le n-1)$」は見かけ上は弱

い条件「$\dim H^k(D,\mathcal{O}_D) \le \aleph_0$ $(2 \le k \le n-1)$」に置き換えることができる.

6 条件 (C) の場合

2 次元の場合には，ある複素 Lie 群に関する Oka-Grauert の原理を満たす条件 (O) の下でも，また任意の位相的自明な正則直線束が Cartier 因子から定まる条件 (C) の下でも，証明の基本的な流れは同一である．ここで強調しておきたいことは，いずれの場合も Kajiwara–Kazama [26] の論法を拡張した貼り合わせ法に基づいており，2 次元の場合が証明方針の最も基本的な形をなしているという点である.

補題 6.1 (Abe [1, Lemma 1])**.** M を $H^2(M,\mathbb{Z})=0$ を満たす 2 次元 Stein 多様体とする. A を M の非空な離散部分集合とし，L を開集合 $M\setminus A$ 上の正則直線束とする. このとき，L が正則的に自明であることと，ある Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ が $M\setminus A$ 上に存在して $L=[\mathfrak{d}]_{M\setminus A}$ となることとは同値である.

補題 6.2 (cf. Kajiwara [23, Lemma 1])**.** $\mathsf{T} := \mathsf{U}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $U_1=\{(z_1,z_2)\in \mathsf{T}\,;\, z_1\neq 0\}, U_2=\{(z_1,z_2)\in \mathsf{T}\,;\, z_2\neq 0\}$ とする．このとき，$\exp\left(\frac{1}{z_1z_2}\right)\in Z^1(\{U_1,U_2\},\mathcal{O}_{\mathsf{T}})$ によって定義される正則直線束 L は，正則的に自明ではない.

定理 6.3. $(S,\mathcal{O}_S)$ を必ずしも被約とは限らない純 2 次元 Stein 空間として，$\mathrm{Sing}(S,\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,S})$ は離散的とする．(D,π) を $(S,\mathcal{O}_S)$ の上の Riemann 領域で $\mathrm{Pic}^0(D)\subset \mathrm{Im}\big([\cdot]_D:\mathrm{Div}(D)\to H^1(D,(\mathcal{O}_{\mathrm{red}D})^*)\big)$ であるとする. このとき，(D,π) は通常境界点に関して局所 Stein である.

証明. 矛盾を導くために，ある通常境界点 α に関して局所 Stein でないとする．すると，補題 4.1 の 11 条件を満たす．従って Riemann 領域の貼り合わせが実行できる．$\delta\in(0,\delta_0)$ が存在して，$\xi^{-1}(\overline{\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)}\times \mathsf{B}_1(\delta))\cap W\subset N$ が成立する. 更には,

$$
\begin{aligned}
&A=\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta),\quad P=\mathsf{B}_1(\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta),\\
&P'=W'\cap\xi^{-1}(P),\quad P''=W''\cap\xi^{-1}(P),\quad R=\xi^{-1}(\mathbb{C}\times\mathsf{B}_1(\delta)),\\
&A'=(\xi|_W)^{-1}(A),\quad Q=R\cap N\setminus\Big(\overline{P'}\cap\xi^{-1}(\overline{\mathsf{B}_1(\rho_1)}\times\mathbb{C})\Big).
\end{aligned}
$$

とおける．補題 4.4 により, $\widetilde{X}=(P\,\dot\cup\, Q)/\sim$ は Stein. 補題 4.5 によって, $v\in\mathcal{O}_D(D_1)$ と $v_0\in\mathcal{O}(P)$ 存在して，P' 上で，$v=1/\xi_1+v_0\circ\xi$ なる表示をもつ．補題 4.2 により，$\{D_1,D_2\}$ は D の開被覆である. 関数 $h=v/\xi_2$ は $D_1\cap D_2$ 上の正則関数である. このとき，$e^*(\mathrm{red}^*(h))$ から定まる正則直線束は Cartier 因子から定まらなくなる．実際，仮に，$g_\nu\in\mathcal{M}^*(D_\nu\cap P')$ $(\nu=1,2)$ が存在して,

$$
\exp(v/\xi_2)=g_2/g_1 \text{ on } D_1\cap D_2\cap P'. \tag{$\star$}
$$

とする．($\star$) から矛盾を導くため，P' 内に Hartogs 図形を描く．任意に $t\in(0,1)$ を取れば，$(\xi|_W)^{-1}(\overline{\mathsf{B}_1(\rho_2)}\times\{t\})\Subset W'$．従って，$r(t)\in(0,\min\{t,1-t\})$ を十分小さくとって，$(\xi|_W)^{-1}(\overline{\mathsf{B}_1(\rho_2)}\times \mathsf{B}_1(t,r(t)))\subset W'$. 従って, $(\xi|_W)^{-1}\Big(\overline{\mathsf{B}_1(\rho_2)}\times\mathsf{B}_1(\delta/3,r(\delta/3))\Big)\subset P'$. 明らかに，$\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta/3,\delta/2)\subset$

$\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta)$ である. 従って,

$$(\xi|_W)^{-1}\left(\left\{\mathsf{B}_1(\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta/3,r(\delta/3))\right\}\cup\left\{\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta/3,\delta/2)\right\}\right)\subset P'.$$

$\mathsf{H}:=\left\{\mathsf{B}_1(\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta/3,r(\delta/3))\right\}\cup\left\{\mathsf{A}(\rho_1,\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta/3,\delta/2)\right\}$ かつ $\mathsf{H}_\nu:=\mathsf{H}\cap\{z_\nu\neq 0\}$ $(\nu=1,2)$ とおく. H は Hartogs 図形で, H の正則被は $\mathsf{B}_1(\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta/3,\delta/2)$ である. $O_\nu:=\xi(D_\nu\cap P')\subset\mathbb{C}^2$ とおく. $\{O_\nu\}_{\nu=1,2}$ は H の開被覆となる. $(\star)$ に $(\xi|_W)^{-1}$ を合成すると

$$\exp(v/\xi_2)\circ(\xi|_W)^{-1}=g_2\circ(\xi|_W)^{-1}/g_1\circ(\xi|_W)^{-1}\ \text{on}\ O_1\cap O_2\cap\xi(W).$$

$f^{(1)}:=g_1\circ(\xi|_W)^{-1}$ と $f^{(2)}:=\exp\left(-\frac{v_0}{z_2}\right)\cdot\left(g_2\circ(\xi|_W)^{-1}\right)$ とおくと,

$$f^{(1)}\exp\left(\frac{1}{z_1z_2}\right)=f^{(2)}\ \text{on}\ O_1\cap O_2\cap P.$$

Grauert–Remmert [18] (Jarnicki–Pflug [22] の Theorem 2.5.9) と Kajiwara–Sakai [28] の定理から, $F^{(\nu)}\in\mathcal{M}^*(\mathsf{E}_\nu)$ で H_ν 上で $F^{(\nu)}=f^{(\nu)}$ $(\nu=1,2)$. ただし, $\mathsf{E}_\nu:=\left\{\mathsf{B}_1(\rho_2)\times\mathsf{B}_1(\delta/3,\delta/2)\right\}\cap\{z_\nu\neq 0\}$ である. $\mathsf{H}_\nu\subset O_\nu$ なので,

$$F^{(1)}\exp\left(\frac{1}{z_1z_2}\right)=F^{(2)}\ \text{on}\ \mathsf{E}_1\cap\mathsf{E}_2\cap P.$$

を得る. これから補題 6.1 を用いると, $\mathsf{U}^2\setminus\{0_2\}$ 上で $\exp\left(\frac{1}{z_1z_2}\right)$ は正則的自明な正則直線束を定めることになるとわかるが, これは補題 6.2 に反する. これで, $e^*(\mathrm{red}^*(h))$ から定まる正則直線束は Cartier 因子から定まらないとわかった. これは $\mathrm{Pic}^0(D)\subset\mathrm{Im}\left([\cdot]_D:\mathrm{Div}(D)\to H^1(D,(\mathcal{O}_{\mathrm{red}D})^*)\right)$ と矛盾する. これで, 2 次元の場合は証明された. □

次に, n 次元の場合を考察する. これには次元帰納法を用いる. まず, 特異点が離散的な Stein 空間の上の Riemann 領域を"良い方向"で切断できることをみる. $f\in\mathcal{O}_X(X)$ に対して, f の零集合を $Z_f:=\{x\in X\ ;\ f(x)=0\}$ と書く.

補題 6.4. $(S,\mathcal{O}_S)$ を被約純 n 次元 Stein 空間で $n\geq 3$ とする. $\mathrm{Sing}(S,\mathcal{O}_S)$ は離散的とする. 任意の $a\in\mathrm{Reg}(S,\mathcal{O}_S)$ に対して, ある正則写像 $G=(g_1,\dots,g_n):S\to\mathbb{C}^n$ が存在して, 次の 5 条件を満たす:

(1) $G(a)=0_n\in\mathbb{C}^n$.
(2) $\det G(a)\neq 0$.
(3) 各 g_ν は任意の $x\in Z_{g_\nu}\cap\mathrm{Reg}(S,\mathcal{O}_S)$ に対し, $dg_\nu(x)\neq 0$.
(4) 各 ν に対し, $Z_{g_\nu}\cap\mathrm{Sing}(S,\mathcal{O}_S)=\emptyset$.
(5) 各 ν に対し, Z_{g_ν} 上で g_ν の多重度が 1.

この補題は Stein 空間の埋め込み定理 [37] を用いて, 埋め込み先の $\mathbb{C}^{2n+1}$ で各成分が 1 次関数になる写像をうまく選ぶことで示せる (cf. Vâjâitu [50, p.533]). 必ずしも被約とは限らない場合も含んで考察するため, 次の記法を用意しておく. 関数 $f\in\mathcal{O}_X(X)$ に対して,

- X の元の構造層 $\mathcal{O}_X$ により誘導される構造を $\mathcal{O}_{Z_f}:=\mathcal{O}_X/f\mathcal{O}_X$ と表す.

- 被約化された構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X}$ により誘導される構造を $\widetilde{\mathcal{O}}_{Z_f} := \mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X}/f_{\mathrm{red}}\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,X}$ と表す.

補題 6.4 と補題 3.3 を用いることで，Lelong-Hitotumatu 型 (Lelong [34], Hitotumatu [21]) の補題を得る.

補題 6.5 (cf. Breaz–Vâjâitu [11, Theorem 2])**.** $(S,\mathcal{O}_S)$ を必ずしも被約とは限らない純 n 次元 Stein 空間で $n \geq 3$ とする．$\mathrm{Sing}(S,\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,S})$ は離散的とする．(D,π) を $(S,\mathcal{O}_S)$ の上の Riemann 領域とする. 以下の条件 $(\star)$ を仮定する.

$(\star)$ 零集合 $(Z_f,\widetilde{\mathcal{O}}_{Z_f})$ は滑らかで f が $(Z_f,\widetilde{\mathcal{O}}_{Z_f})$ 上で多重度が 1 となるような任意の $f \in \mathcal{O}_S(S)$ に対して，そこから定まる $(Z_f,\mathcal{O}_{Z_f})$ の上の Riemann 領域 (D_f,π_f) は通常境界点に関して局所 Stein である.

このとき，(D,π) は通常境界点に関して局所 Stein である．但し，$D_f := \pi^{-1}(Z_f), \pi_f := \pi|_{D_f}$ である.

この補題 6.5 により次元帰納法を使うことで次が示せる.

定理 6.6 (cf. Breaz–Vâjâitu [11, Theorem 4])**.** $(S,\mathcal{O}_S)$ を必ずしも被約とは限らない純 n 次元 Cohen-Macaulay Stein 空間として，$\mathrm{Sing}(S,\mathcal{O}_{\mathrm{red}\,S})$ は離散的とする．(D,π) を $(S,\mathcal{O}_S)$ の上の Riemann 領域とし，次の 2 条件を満たすとする:

- $H^k(D,\mathcal{O}_D) = 0$ $(2 \leq k \leq n-1)$.
- $\mathrm{Pic}^0(D) \subset \mathrm{Im}\big([\cdot]_D : \mathrm{Div}(D) \to H^1(D,(\mathcal{O}_{\mathrm{red}D})^*)\big)$.

このとき，(D,π) は通常境界点に関して局所 Stein である.

7　関連するいくつかの結果

条件 (O) と条件 (C) は, いずれも Cousin-II 問題と深く関わっている．この Cousin-II 問題は, Oka-Grauert の原理の名称にも見られるように, Oka の主要な研究対象の 1 つであった [40]. 他方で, Oka が初期に取り組んだ研究課題 [38, 39] の 1 つである Cousin-I 問題に関しては，どのような結果が得られるのかを問うのは自然と思う. 本章では, 関連する結果として Cousin-I 性に関する定理を述べる.

$(X,\mathcal{O}_X)$ を被約解析空間とする．X が **Cousin-I** であるとは，Cousin-I 問題が常に解を持つことである．これはコホモロジー的条件「標準写像 $H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{M}_X)$ が単射である」と表現することができる (Grauert–Remmert [19, p. 137])．従って，Cousin-I 性もコホモロジー的条件として取り扱うことができる.

定理 7.1 (Abe–Furushima [4, Theorem 4])**.** $(X,\mathcal{O}_X)$ を連結な正規解析空間とし，次の 2 条件を仮定する:

- 定数でない任意の $f \in \mathcal{O}_X(X)$ に対して，Z_f は Stein である．
- X は Cousin-I である．

このとき，X は Kerner の意味 [30] での K 被 $H(X)$ が定まり，$X = H(X)$ が成り立つ．

定理 7.2 (Abe–Abe [5, Theorem 8])**.** S を n 次元 Stein 多様体，(D, π) を S の上の Riemann 領域とし，次の 2 条件を仮定する:

- S 上の任意の Z_f が非特異であるような非定数正則関数 f に対して，集合 $\{y \in D \mid (f \circ \pi)(y) = 0\}$ は Stein である．
- D は Cousin-I である．

このとき，D は Stein である．

これらのことと前の章の定理から，2 次元 Stein 多様体の上の Riemann 領域に対して，次の同値性が成り立つ．

系 7.3. S を 2 次元 Stein 多様体，(D, π) を S の上の Riemann 領域とする．このとき，次の 4 条件は同値である:

(1) D は Stein である．
(2) D は Cousin-I である．
(3) $\mathrm{Pic}^0(D) \subset \mathrm{Im}\big([\cdot]_D : \mathrm{Div}(D) \to H^1(D, \mathcal{O}_D^*)\big)$.
(4) 正の次元の複素 Lie 群 G が存在して，$H^1(D, \mathcal{O}^G) \to H^1(D, \mathcal{E}^G)$ は準単射である．

Cousin-I 性を高次コホモロジー群へ拡張した条件「$H^k(D, \mathcal{O}_D) \to H^k(D, \mathcal{M}_D)$ が単射」を考察した研究 [46, 47, 48] もあり，中間的擬凸性についても，被約 Stein 空間の内部領域に対して類似した結果が得られている．以下は Eastwood–Suria [14] の定理の一般化となっている．

定理 7.4 (Sugiyama [48, Theorem 4.1])**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を純 n 次元被約 Stein 空間, D を X 内の開集合, $1 \le q \le n-1$ とする．次の 2 条件を仮定する:

- $H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \to H^{n-1}(D, \mathcal{M}_D)$ が単射である．
- $H^k(D, \mathcal{O}_D) = 0$ $(q \le k \le n-2)$.

このとき，D は任意の $p \in \partial D \setminus \mathrm{Sing}(X)$ に対して，局所弱 q-擬凸である．

参考文献

[1] Abe, M.: Holomorphic line bundles on a domain of a two-dimensional Stein manifold. Ann. Polon. Math. **83**, no. 3, 269–272 (2004)

[2] Abe, M.: Open sets which satisfy the Oka-Grauert principle in a Stein space. Ann. Mat.

Pura Appl. (4) **190**, 703–723 (2011)

[3] Abe, M.: Holomorphic line bundles and Cartier divisors on domains in a Stein orbifold with discrete singularities. Toyama Math. J. **36**, 15–26 (2013/14)

[4] Abe, M., Furushima, M. : Note on the theorem of Cartan-Behnke-Stein. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **37**, 57–62 (1983)

[5] Abe, M., Abe, Y.: Domains over a K-complete manifold. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **38**, 133–140 (1984)

[6] Abe, M., Shima, T., Sugiyama, S.: Intermediate pseudoconvexity for unramified Riemann domains over $\mathbb{C}^n$. Toyama Math. J. **40**, 17–35 (2018/19)

[7] Abe, M., Sugiyama, S.: Unramified Riemann domains satisfying the Oka-Grauert principle over a Stein manifold. J. Geom. Anal. **34**, No. 10, Paper No. 324, (2024)

[8] Ballico, E.: Annullamento di gruppi di coomologia e spazi di Stein. Boll. Unione Mat. Ital. B (5) **18**, 649–662 (1981)

[9] Ballico, E.: Finittezza e annullamento di gruppi di coomologia su uno spazio complesso. Boll. Un. Mat. Ital. B (6) **1**, 131–142 (1982)

[10] Ballico, E.: Cousin I condition and Stein spaces. Complex Variables, Theory Appl. **50**, No. 1, 23–25 (2005)

[11] Breaz, D., Vâjâitu, V.: A Stein criterion via divisors for domains over Stein manifolds. Math. Scand. **115**, No. 2, (2014), 287–302.

[12] Colţoiu, M., Diederich, K.: The Levi problem for Riemann domains over Stein spaces with isolated singularities. Math. Ann. **338**, no.2, 283–289 (2007)

[13] Docquier, F., Grauert, H.: Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinischer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **140**, 94–123 (1960)

[14] Eastwood, G. M. , Suria, G. Vigna.: Cohomologically complete and pseudoconvex domains, Comment. Math. Helv. **55**, 413–426 (1980).

[15] Forstnerič, F.: Stein manifolds and holomorphic mappings: The homotopy principle in complex analysis. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 56, 2nd edn. Springer, Cham, 2017

[16] Fujita, O.: Domaines pseudoconvexes d'ordre général et fonctions pseudoconvexes d'ordre général. J. Math. Kyoto Univ. **30**, 637–649 (1990)

[17] Fujita, O.: On the equivalence of the q-plurisubharmonic functions and the pseudoconvex functions of general order. 人間文化研究科年報（奈良女子大学）**7**, 77–81 (1991)

[18] Grauert, H., Remmert, R.: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. Comment. Math. Helv. **31**, 152–183 (1956)

[19] Grauert, H., Remmert, R.: Theory of Stein Spaces, Grundl. Math. Wiss. vol.236. Springer, Berlin, 1979

[20] Gunning, R. C.: Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. III, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990.

[21] Hitotumatu, S.: On some conjectures concerning pseudo-convex domains. J. Math. Soc. Japan **6**, 177–195 (1954)

[22] Jarnicki, M., Pflug, P.: Extension of holomorphic functions. De Gruyter Exp. Math. **34**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000

[23] Kajiwara, J.: On Thullen's example of a Cousin-II domain. Sci. Rep. Kanazawa Univ. **9**, 1–8 (1964)

[24] Kajiwara, J.: Characterization of Stein subdomains of a complex projective space through Oka's principle. Math. Balkanica **8**, 131–137 (1978)

[25] Kajiwara, J.: Equivalence of Steinness and validity of Oka's principle for subdomains with continuous boundaries of a Stein manifold. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A Math. **33**, 83–93 (1979)

[26] Kajiwara, J., Kazama, H.: Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set. Math. Ann. **204**, 1–12 (1973)

[27] Kajiwara, J., Nishihara, M.: Charakterisierung der Steinschen Teilgebieten durch Okasches Prinzip in zwei-dimensionaler Steinscher Mannigfaltigkeit. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **33**, 71–76 (1979)

[28] Kajiwara, J., Sakai, E.: Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions. Nagoya Math. J. **29**, 75–84 (1967)

[29] Kaup, L.,Kaup, B.: Holomorphic functions of several variables. An introduction to the fundamental theory, Walter de Gruyter, Berlin, 1983

[30] Kerner, H.: Holomorphiehüllen zu K-vollständigen komplexen Räumen. Math. Ann. **138**, 316–328 (1959)

[31] Laufer, H. B. :On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy. Ann. of Math. (2) **84**, 102–118 (1966)

[32] Leiterer, J.: Equivalence of Steinness and validity of Oka's principle for subdomains of Stein manifolds. Math. Nachr. **89**, 181–183 (1979)

[33] Leiterer, J.: Holomorphic vector bundles and the Oka-Grauert principle. In: Gindikin, S.G., Khenkin, G.M. (eds.) Several complex variables IV, Encyclopaedia Math. Sci., **10**, pp. 63–103. Springer, Berlin (1990)

[34] Lelong, P.: Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. J. Analyse Math. **2**, 178–208 (1952)

[35] Matsutomo, K.: Pseudoconvex Riemann domains of general order over Stein manifolds. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **44**, 95–109 (1990)

[36] Mori, Y.: A complex manifold with vanishing cohomology sets. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. **26**, 179–191 (1972)

[37] Narasimhan, R.: Imbedding of holomorphically complete complex spaces. Amer. J. Math. **82**, 917–934 (1960)

[38] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. I: Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles. J. Sci. Hiroshima Univ. **6**, 245–255 (1936)

[39] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. II: Domaines d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ., **7**, 115–130 (1937).

[40] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III: Deuxième problème de Cousin. J. Sci. Hirosima Univ. **9**, 7–19 (1939)

[41] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX: Domaines finis sans point critique intérieur. Japan. J. Math. **27**, 97–155 (1953)

[42] Peternell, T.: Pseudoconvexity, the Levi problem and vanishing theorems. Several complex variables, VII, Encyclopaedia Math. Sci., **74**, pp. 221–257 Springer-Verlag, Berlin, 1994

[43] Popa-Fischer, A.: A generalization to the q-convex case of a theorem of Fornæss and Narasimhan. Michigan Math. J. **50**, 483–492 (2002)

[44] Serre, J.-P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Centre Belge Rech. math., Colloque fonctions plusieurs variables, Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, 57–68 (1953)

[45] Siu, Y.T.: Non-countable dimensions of cohomology groups of analytic sheaves and domains of holomorphy. Math. Z. **102**, 17–29 (1967)

[46] Sugiyama, S.: Generalized Cartan-Behnke-Stein's theorem and q-pseudoconvexity in a Stein manifold. Tohoku Math. J. (2) **72**, 527–535 (2020)

[47] Sugiyama, S.: An open set satisfying a local intermediate Cousin-I condition in a complex space, Kobe J. Math. **40**, No. 1-2, 47–56 (2023)

[48] Sugiyama, S.: q-complete with corners open sets and vanishing cohomology groups. Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser. **31**, No. 1, Paper No. 31, (2025)

[49] Sugiyama, S.: Holomorphic line bundles and divisors on Riemann domains over Cohen-Macaulay Stein spaces. Preprint.

[50] Vâjâitu, V.: Pseudoconvex domains over q-complete manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29**, , no. 3, 503–530 (2000)

[51] Watanabe, K.: Pseudoconvex domains of general order and vanishing cohomology, Kobe J. Math. **10**, No. 1, 107–115 (1993)