

Multi-scale \mathbb{R} -tree limits for affine rays of polynomial quadratic differentials

坂井 健人（東京大学）*

概要

Riemann 面上の正則 2 次微分は調和写像を介して双曲構造を定める。とくに、複素平面上の多項式 2 次微分は双曲理想多角形のモジュライを記述する。本講演では、この「退化版」である \mathbb{R} -木のモジュライへの対応を扱う。多項式のなす空間において、次数が下がる方向のアフィンレイに沿って \mathbb{R} -木のスケーリング極限をとると、特殊なスケーリングで非自明な幾何的極限が発生することが観察できる。このような現象の発生条件や幾何的極限について述べる。

1 導入

1.1 The harmonic map parametrization

本研究の動機づけを説明するために、[Wol89] にしたがって Teichmüller 空間の harmonic map parametrization について説明する。まず、 S を向きづけられた連結な閉曲面とし、 S の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(S)$ を S 上の双曲構造のアイソトピー類のなす集合として定義する。また、 S に複素構造をのせた Riemann 面 X 上の正則 2 次微分のなすべきトル空間を $Q(X)$ と表す。双曲曲面 $C \in \mathcal{T}(S)$ に対して、恒等写像とアイソトピックな調和微分同相写像 $u: X \rightarrow C$ が一意的に存在する [ES64, Har67, Sam78]。このとき、双曲曲面 C を定める計量の引き戻し u^*C の dz^2 -パートは正則 2 次微分になっており、したがって、写像

$$\Phi: \mathcal{T}(S) \rightarrow Q(X); C \mapsto (u^*C)^{2,0} \quad (1.1)$$

が得られる。写像 Φ を **harmonic map parametrization** とよぶ。Wolf は写像 Φ が同相であることを示した [Wol89]。

一方で、正則 2 次微分 $q \in Q(X)$ に対して、 q の垂直測度付き葉層構造という S 上の特異葉層構造と横断的測度の対 $F_v(q)$ が定まる（例えば、[Gar87]）。この対応は正の実数による定数倍の作用で同変的であるから、正則 2 次微分の射影類の空間 $\mathbb{P}Q(X) := Q(X) - \{0\}/\mathbb{R}_{>0}$ から Thurston 境界 $\partial\mathcal{T}(S)$ （すなわち、 S 上の測度付き葉層構造構造の射影類のなす空間）への写像

* 第 68 回函数論シンポジウム（2025 年 10 月 17–19 日、茨城大学 水戸キャンパス）アブストラクト。

E-mail: kento@ms.u-tokyo.ac.jp

本研究は科研費（課題番号：25KJ0069）の助成を受けたものである。

$[F_v]: \mathbb{P}Q(X) \rightarrow \partial\mathcal{T}(S)$ が誘導される. 正則 2 次微分のなすベクトル空間 $Q(X)$ の球面コンパクト化を $\overline{Q(X)} = Q(X) \cup \mathbb{P}Q(X)$ と表し, Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化を $\overline{\mathcal{T}(S)}$ と表す (Thurston コンパクト化については [FLP12]などを参照). Wolf は, 写像 $\bar{\rho}: \overline{Q(X)} \rightarrow \overline{\mathcal{T}(S)}$ を内部では Φ^{-1} , 境界では $[F_v]$ として定義し, $\bar{\rho}$ が同相写像になることを示した [Wol89].

Teichmüller 空間の harmonic map parametrization やその Thurston コンパクト化への拡張の結果は, 尖点付きの双曲構造の場合にも, 同様に成り立つ [Loh91, Sak23].

1.2 境界付き曲面の場合

実は, 境界付き曲面の Teichmüller 空間においても harmonic map parametrization は与えられている [Wol91, Sag23, All24, Gup21]. この場合のパラメータ空間について説明する. まず, X を針孔付き閉 Riemann 面とし, 針孔の集合を $\{p_1, \dots, p_n\}$ とする. 各針孔 p_i まわりの局所座標 (U_i, z_i) を固定しておく. X 上の正則 2 次微分 q が p_i で極をもつと仮定する. 正則 2 次微分 q の p_i での**主要部 (principal part)** とは, $\pm\sqrt{q}dz_i$ を Laurent 展開した際の -1 次以下の項を指す. あらかじめ, 各 p_i に対して主要部データ $\mathcal{P} = \{\pm P_i(z_i)dz_i\}$ を付与しておき, \mathcal{P} を主要部として実現するような X 上の正則 2 次微分の集合を $Q(X, \mathcal{P})$ と表す. 各 p_i 周りの主要部を 2 乗した P_i^2 における極の位数を m_i (≥ 3) とする. X 上の因子 E を

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{2} p_i$$

で定める. ここで, m_i が奇数のとき, $s_i = m_i + 1$, m_i が偶数のとき, $s_i = m_i$ である. このとき, $Q(X, \mathcal{P})$ は

$$Q(X, \mathcal{P}) = \{*\} + H^0(X, \Omega_X(E)^{\otimes 2}) \quad (* \in Q(X, \mathcal{P}))$$

と表され, アフィン空間の構造をもつことに注意する.

次に, パラメetrizeされる Teichmüller 空間にについて述べよう. 位相的な曲面 S を, X を各 p_i で real oriented blowup し, $(m_i - 2)$ 個の点を p_i に対応する境界から除いたものとして定義する. 曲面 S は (測地境界を持つ完備な有限面積の) 双曲構造を許容すると仮定する. このとき, S 上の双曲構造に対して, \mathcal{P} との “compatibility condition” が定義される (これは各 p_i に対して定義される, metric residue という双曲構造の不变量に関する条件であるが, ここでは省略する. 詳しくは [All24, Sak25]などを参照). この “compatibility condition” を満たす S 上の双曲構造のなす Teichmüller 空間を $\mathcal{T}(S, \mathcal{P})$ と表す.

Gupta は (1.1) と同様のタイプの parametrization

$$\Phi: \mathcal{T}(S, \mathcal{P}) \rightarrow Q(X, \mathcal{P}) \tag{1.2}$$

が得られること, および Φ が同相写像となることを示した [Gup21]. 閉曲面の場合, harmonic map parametrization はコンパクト化の境界まで自然に拡張されたことを踏まえると, 境界付き曲面でも同様の結果を期待するのは自然である. 閉曲面の場合は, $Q(X)$ における原点を起点とす

る ray $\{tq\}_{t>0} \subset Q(X)$ に沿った双曲構造の極限を求めることが、重要なステップのひとつであった。しかし、境界付き曲面の場合、パラメータ空間 $Q(X, \mathcal{P})$ は前述したようにアフィン空間であるので、原点を起点とする ray に沿った双曲構造の退化族を考えることはできない。そこで、次点で解析が容易そうな正則 2 次微分の族として、**affine ray**

$$p + tq \quad (p \in Q(X, \mathcal{P}), q \in H^0(X, \Omega(E)^{\otimes 2}), t > 0)$$

を考え、affine ray に沿った双曲構造の退化を調べたいというのが動機である。

2 設定

2.1 多項式に付随する \mathbb{R} -tree

Riemann 面 X を $\mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$ 、すなわち複素平面 \mathbb{C} とする。このとき、 ∞ で $m+4$ 位の極を持つ X 上の正則 2 次微分の空間は、 m 次の \mathbb{C} 係数多項式の空間 $\mathbb{C}[z]_m$ と同一視できる。 \mathbb{C} 係数の m 次多項式 2 次微分 $p(z) dz^2$ に対して、 \mathbb{C} 上の擬距離 $d_p^h: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が

$$d_p^h(z_1, z_2) = \left| \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{Re}(\sqrt{p} dz) \right|$$

により定まる。擬距離 d_p^h を**水平移動距離 (horizontal translation length)** という。 \mathbb{C} 上の同値関係を $z_1 \sim z_2$ を $d_p^h(z_1, z_2) = 0$ で定義する。この同値関係による商空間 X/\sim を $T(p)$ と表す。つまり、 $T(p)$ は、擬距離 d_p^h による metric identification であり、 d_p^h による自然な距離をもつ距離空間である。自然な全射 $\pi: \mathbb{C} \rightarrow T(p)$ は collapsing map と呼ばれる。距離空間として、 $T(p)$ は \mathbb{R} -木の構造を持つ（図 1）。（ $T(p)$ は $p(z) dz^2$ に付随する垂直測度付き葉層構造の leaf space である。）点 $z_0 \in \mathbb{C}$ を多項式 p の零点とするとき、 $\pi(z_0)$ が \mathbb{R} -木 $T(p)$ の頂点（すなわち、枝分かれしている点）に対応する。多項式 2 次微分の零点は有限個であるため、 $T(p)$ の頂点は有限個である。さらに、 $T(p)$ は無限遠点で $(m+2)$ 倍の枝分かれを持つことがわかる。無限遠点で $(m+2)$ 倍の枝分かれを持つような \mathbb{R} -木全体のなす空間を Tree_{m+2} と表す。

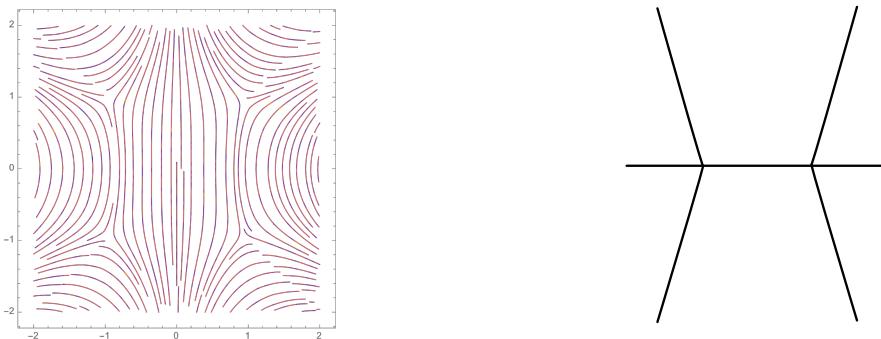


図 1 左図： $(z^4 + 1) dz^2$ に付随する垂直測度付き葉層構造。この“等高線”は metric identification における同値類を表す。右図： \mathbb{R} -木 $T((z^4 + 1) dz^2)$ 。無限遠で 6 倍の枝分かれを持つ。

2.2 調和写像との関係

Collapsing map $\pi: X \rightarrow T(p)$ はある種の調和写像とみなすことができる [KS97, Wol95]。また、双曲理想多角形 C が $T(p)$ へ退化するとき、調和写像 $u: X \rightarrow C$ は $\pi: X \rightarrow T(p)$ に広義一様収束する、この意味で π は調和写像としての退化先とみなせる [Wol95]。写像 (1.2) の逆写像は（主要部データ全体に渡って合併をとることで）全射写像

$$C: \mathbb{C}[z]_m \rightarrow \mathcal{T}(P_{m+2})$$

を誘導する。ただし、 $\mathcal{T}(P_{m+2})$ は理想 $(m+2)$ 角形 P_{m+2} の Teichmüller 空間とする。したがって、多項式 p に対して、2 次微分 $p(z) dz^2$ に付随する \mathbb{R} -木 $T(p)$ を取る写像

$$T: \mathbb{C}[z]_m \rightarrow \text{Tree}_{m+2}$$

は写像 $C: \mathbb{C}[z]_m \rightarrow \mathcal{T}(P_{m+2})$ と漸近的に等しいと期待できる。したがって、前段階として写像 T の漸近的な振る舞いを調べる。なお、正則 2 次微分と付随する \mathbb{R} -木の対応についても、(1.2) に準ずるような主要部を固定するごとの対応があることが [GW19] により示されている。

2.3 距離空間の収束

距離空間の収束について基本的な事項を述べる。距離空間 (X, d) と正の実数 $\lambda > 0$ に対して、距離関数を λ 倍して得られる距離空間 $(X, \lambda d)$ を単に λX と書くことにする。

Definition 2.1. 距離空間 X の部分集合 A が ε -稠密であるとは、 A の ε -近傍が X を包むときにいう。距離空間 X, Y の間の ε -関係とは、部分集合 $R \subset X \times Y$ であって、次の条件を満たすものである：

- $\text{pr}_X(R) \subset X, \text{pr}_Y(R) \subset Y$ はそれぞれ ε -稠密な部分集合である。
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$ のとき、 $|d_X(x_1, x_2) - d_Y(y_1, y_2)| < \varepsilon$ が成り立つ。

距離空間 X と Y の間の ε -関係 R が全射であるとは、 $\text{pr}_X: R \rightarrow X, \text{pr}_Y: R \rightarrow Y$ がそれぞれ全射であるときにいう。 X と Y の間に ε -関係が存在するとき、 $X \sim_\varepsilon Y$ と表し、全射な ε -関係が存在するとき $X \simeq_\varepsilon Y$ と表す。 X と Y の間の **Gromov-Hausdorff 距離**を

$$D_H(X, Y) = \inf\{\varepsilon \mid X \simeq_\varepsilon Y\}$$

で定義する。

Definition 2.2 (Gromov-Hausdorff 収束). 距離空間の列 X_n が距離空間 X に **Gromov-Hausdorff 収束**するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ のとき $D_H(X_n, X) < \varepsilon$ が成立するときにいい、このとき $X_n \xrightarrow{\text{GH}} X$ と表す。

Definition 2.3. 点付き距離空間の列 (X_n, x_n) ($x_n \in X_n$) が、点付き距離空間 (X, x) に**点付き Gromov-Hausdorff 収束**するとは、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $r > 0$ を固定するとき、十分大きい

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\bar{B}(x_n, r) \subset X_n$ と $\bar{B}(x, r) \subset X$ の間の ε -関係 R_n が存在して, $(x_n, x) \in R_n$ となるときにいう. また, このとき, $(X_n, x_n) \xrightarrow{\text{P.GH}} (X, x)$ と表す.

3 \mathbb{R} -木の幾何的極限

3.1 高いスケーリングオーダー

\mathbb{C} 係数多項式 p, q の次数をそれぞれ m, n ($m > n$) とし,

$$p(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0, \quad q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0$$

とする. ただし, $a_m \neq 0, b_n \neq 0$ である. Affine ray $\{T(p + tq)\}_{t>0}$ のスケーリング極限を考える上では, パラメータ t を取り替えて $\{T(p + t^{m-n}q)\}_{t>0}$ としたほうが計算上都合がよい.

まず, スケーリングオーダーが高いとき極限は次のようにになる.

Theorem 3.1. $\alpha > \frac{m+2}{2}$ とする. 距離空間の列 $\{T(p + t^{m-n}q)\}_{t>0}$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき,

$$t^{-\alpha} T(p + t^{m-n}q) \xrightarrow{\text{GH}} \begin{cases} T(a_m z^m) & \alpha > \frac{m+2}{2} \\ T(a_m z^m + b_n z^n) & \alpha = \frac{m+2}{2} \end{cases}$$

が成り立つ.

この結果は次のように解釈できる. スケーリングオーダー α が $\frac{m+2}{2}$ より大きい場合, スケーリングにより空間が縮まる速度が距離空間 $T(p + t^{m-n}q)$ の発散の速度を上回るため, 一点から $(m+2)$ 本の無限辺が出ているような自明な木が極限として現れる. 非自明な木が極限として現れる上限のオーダー $\alpha = \frac{m+2}{2}$ であり, 退化した理想多角形の“境界”をつなぐ弧の長さの発散オーダーとみなせるため, $\alpha = \frac{m+2}{2}$ での極限は, Thurston 境界としての収束を表している.

3.2 零点の挙動

次に, スケーリングオーダー α が $\frac{m-n}{2} < \alpha < \frac{m+2}{2}$ を満たすとき, 対応する幾何的極限について考える. Affine ray $p + t^{m-n}q$ の零点の一つを $\zeta(t)$ とするとき, t が十分大きければ, $\zeta(t)$ はなめらかな曲線を描く. このとき, $\zeta(t)$ の挙動は q の零点に収束するか, ∞ に発散するかのいずれかである. \mathbb{R} -木としての構造は実質的には頂点の間の距離によって決まるので, $0 \in \mathbb{C}$ を起点として取り

$$d(t) := d_{p+t^{m-n}q}^h(0, \zeta(t))$$

の発散のオーダーを考えることで, 非自明な収束をしているかが判定できる. Theorem 3.1 により, 発散する零点 $\zeta(t)$ に対して, 一般には $d(t) \sim t^{\frac{m+2}{2}}$ ($t \rightarrow \infty$) であるが, 特殊な p, q そして $\zeta(t)$ に対しては, $d(t)$ の発散のオーダーが $t^{\frac{m+2}{2}}$ よりも小さくなることが観察できる.

発散する零点 $\zeta(t)$ は $\zeta \in \{a_m z^{m-n} + b_n = 0\}$ を分枝として選ぶことにより一つ決まる。すなわち、 $\zeta \in \{a_m z^{m-n} + b_n = 0\}$ が存在して

$$\frac{\zeta(t)}{t\zeta} \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる。 $\zeta \in \{a_m z^{m-n} + b_n = 0\}$ を分枝として選んだときの $\zeta(t)$ に対する $d(t)$ を $d_\zeta(t)$ と表す。

Definition 3.2. 組 (p, q, ζ) に対する i 番目条件 (i -th condition) を

- ($i = 0$ のとき) $a_m \zeta^{m+2} > 0$ かつ $b_n \zeta^{n+2} < 0$,
- ($0 < i \leq m$ のとき) $a_{m-i} \zeta^{m-i+2} \in \mathbb{R}$ かつ $b_{n-i} \zeta^{n-i+2} \in \mathbb{R}$

で定める。ただし、 $j < 0$ のとき $b_j = 0$ とする。次に自然数 $N(p, q, \zeta)$ を

$$N(p, q, \zeta) = \min\{k \in \{0, 1, 2, \dots, m\} \mid (p, q, \zeta) \text{ は } k \text{ 番目条件を満たさない}\}$$

として定義する。

Theorem 3.3. $N(p, q, \zeta) = N$ とする。 $0 \leq N \leq \lfloor n/2 \rfloor$ のとき、ある $f_{p,q,\zeta}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$t^{-\frac{m-2N+2}{2}} d_\zeta(t) \rightarrow \int_0^1 f_{p,q,\zeta}(s) ds \quad (t \rightarrow \infty) \tag{3.1}$$

が成り立つ。ここで、 $f_{p,q,\zeta}$ は p, q, ζ によって決まる関数である。

$N \geq 2$ のとき $N(p, q, \zeta) = N$ であるという条件は $\zeta(t)$ の $t \rightarrow \infty$ における漸近展開

$$\zeta(t) = \zeta t + c_1 + \frac{c_2}{t} + \dots$$

の係数について $c_1, \dots, c_{N-1} \in \mathbb{R}$ を満たすことを保証する。

3.3 低いスケーリングオーダー

Definition 3.2において、0番目条件を満たす $\zeta \in \{a_m z^{m-n} + b_m = 0\}$ は存在しないとき、 (p, q) は generic であるということにする。Generic な (p, q) に対しては、任意の発散零点 $\zeta(t)$ に対して、 $d_\zeta(t) \sim t^{\frac{m+2}{2}}$ となり、収束零点については $d_{\zeta(t)} \sim t^{\frac{m-n}{2}}$ であるから、 $\frac{m-n}{2} < \alpha < \frac{m+2}{2}$ をみたす α について

$$t^{-\alpha} (T(p + t^{m-n}q), \pi_t(0)) \xrightarrow{\text{P.GH}} (T(b_n z^n), \pi(0)) \tag{3.2}$$

となる。ここで $\pi_t: \mathbb{C} \rightarrow T(p + t^{m-n}q), \pi: \mathbb{C} \rightarrow T(b_n z^n)$ はそれぞれの collapsing map である。 $\frac{m-n}{2} < \alpha < \frac{m+2}{2}$ をみたす α に対して、(3.2) が成り立つとき、 $(T(p + t^{m-n}q), \pi_t(0))$ は自明な収束をするといい、そうでないとき非自明な収束をするという。点付き Gromov-Hausdorff 収束を考えるのは、 $0 \in \mathbb{C}$ から \mathbb{R} -tree の頂点 $\pi_t(\zeta(t))$ までの距離の発散のオーダーが t^α ($\frac{m-n}{2} < \alpha < \frac{m+2}{2}$) を超え、全体の Gromov-Hausdorff 収束は期待できないためである。

Theorem 3.3 により、generic でない状況では、非自明な収束が引き起こされることがわかる：

Corollary 3.4. 自然数 N は $1 < N \leq \lfloor n/2 \rfloor$ を満たすとする. m, n 次多項式の組 (p, q) に対して, $N(p, q, \zeta) = N$ をみたす $\zeta \in \{a_m z^{m-n} + b_m = 0\}$ が存在するとする. このとき, $\alpha = \frac{m-2N+2}{2}$ のオーダーでスケーリングされた \mathbb{R} -木の列 $t^{-\alpha}(T(p + t^{m-n}q), \pi_t(0))$ は非自明な収束をする.

非自明な収束をするとき, その収束先の \mathbb{R} -木は, $T(b_n z^n)$ において $\pi(0)$ から距離が $\int_0^1 f_{p,q,\zeta} ds$ (Theorem 3.3) 離れた点に無限に伸びる辺が付け加わったものである.

参考文献

- [All24] Dylan G. L. Allegretti. Stability conditions and Teichmüller space. *Math. Ann.*, 390(3):3827–3890, 2024.
- [ES64] James Eells, Jr. and J. H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [FLP12] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Thurston's work on surfaces*, volume 48 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. Translated from the 1979 French original by Djun M. Kim and Dan Margalit.
- [Gar87] Frederick P Gardiner. Teichmüller theory and quadratic differentials. *Pure Appl. Math.*, 1987.
- [Gup21] Subhjoy Gupta. Harmonic maps and wild Teichmüller spaces. *Journal of Topology and Analysis*, 13(02):349–393, 2021.
- [GW19] Subhjoy Gupta and Michael Wolf. Meromorphic quadratic differentials and measured foliations on a Riemann surface. *Mathematische Annalen*, 373(1-2):73–118, 2019.
- [Har67] Philip Hartman. On homotopic harmonic maps. *Canadian J. Math.*, 19:673–687, 1967.
- [KS97] Nicholas J. Korevaar and Richard M. Schoen. Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces. *Comm. Anal. Geom.*, 5(2):333–387, 1997.
- [Loh91] Jochen Lohkamp. Harmonic diffeomorphisms and Teichmüller theory. *Manuscripta Math.*, 71(4):339–360, 1991.
- [Sag23] Nathaniel Sagman. Infinite energy equivariant harmonic maps, domination, and anti-de sitter 3-manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 124(3), 2023.
- [Sak23] Kento Sakai. The harmonic map compactification of Teichmüller spaces for punctured Riemann surfaces. *Conform. Geom. Dyn.*, 27:322–343, 2023.
- [Sak25] Kento Sakai. Uniform degeneration of hyperbolic surfaces with boundary along harmonic map rays. *Journal of Topology and Analysis*, 2025.
- [Sam78] J. H. Sampson. Some properties and applications of harmonic mappings. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 11(2):211–228, 1978.

- [Wol89] Michael Wolf. The Teichmüller theory of harmonic maps. *J. Differential Geom.*, 29(2):449–479, 1989.
- [Wol91] Michael Wolf. Infinite energy harmonic maps and degeneration of hyperbolic surfaces in moduli space. *Journal of differential Geometry*, 33(2):487–539, 1991.
- [Wol95] Michael Wolf. Harmonic maps from surfaces to \mathbf{R} -trees. *Math. Z.*, 218(4):577–593, 1995.