Teichmüller空間のThurston距離と接空間の凸構造

学習院大学理学部・大鹿健一

2025年10月18日

1　Thurston計量の定義と基礎的事項

本講演の目的は，Teichmüller空間のThurston計量の紹介と最近私が行なっているThurston計量の無限小構造についてのBar-Natan, Papadopoulosとの共同研究について解説をすることである．まずThurston計量の定義と基礎的性質について説明する．これらはThurstonの正式には出版されなかった論文[3]に含まれている内容である．

本講演では常に向きづけられた閉曲面で種数が2以上のものを考え，それをSで表すことにする．SのTeichmüller空間$\mathcal{T}(S)$をS上の双曲計量のisotopy類の空間とみなす．Teichmüllerが用いた擬等角写像の代わりに，Lipschitz写像を用いて，ここに非対称な計量を入れようというのがThurstonの発想であった．

距離空間$(X, d_X), (X, d_Y)$の間のLipschitz写像$f\colon X \to Y$について，$\mathrm{Lip}(f)$を$\displaystyle\sup_{x_1 \neq x_2 \in X} \frac{d_Y(f(x_1), f(x_2))}{d_X(x_1, x_2)}$と定める．$\mathcal{T}(S)$の2点$m, n$を代表元である双曲計量と同一視し，

$$\mathrm{d_{Th}}(m, n) = \inf_{f \simeq \mathrm{id}} \log \mathrm{Lip}(f)$$

によりThurston距離$\mathrm{d_{Th}}$を定義する．$\mathrm{d_{Th}}$について3角不等式が成り立つのは明らかである．一方$\mathrm{d_{Th}}(m, n) \geq 0$であることと，$\mathrm{d_{Th}}(m, n) = 0 \Rightarrow m = n$には面積の不変性を用いた若干の議論が必要である．さらに対称律は一般には成立しない．

この距離の別の表現がThurstonによって与えられている．

$$\mathrm{d_{Th}}(m, n) = \log \sup_{c \in \mathcal{C}} \frac{\ell_n(c)}{\ell_m(c)},$$

というもので，ここで $\mathcal{C}$ は S 上の本質的単純閉曲線の isotopy 類を表し，ℓ_m は双曲計量 m についての測地的長さを与える関数である．この等式の片方の不等号は簡単にわかるが，もう一方は次節で見る測地線の振る舞いにより始めてわかる．

Thurston 計量は Finsler 計量である．実際次で定義されるノルムより導かれる Finsler 計量が d_{Th} に他ならない．v を $m \in \mathcal{T}(S)$ における接ベクトルとする．この時

$$\|v\|_{\mathrm{Th}} = \sup_{c\in\mathcal{C}} \frac{d\ell_c(v)}{\ell_m(c)},$$

が（弱）ノルムであるが，ここで，ℓ_c は $m \in \mathcal{T}(S)$ を $\ell_m(c)$ に写す関数である．

2　測地線の振る舞い

一般の測地線を記述する前に，特別な測地線，stretch path の定義が必要である．$m \in \mathcal{T}(S)$ について，geodesic lamination λ とは m についての互いに素な単純測地線からなる S の閉集合である．geodesic lamination λ は他の geodesic lamination の真部分集合でない時，完備であるという．$m \in \mathcal{T}(S)$ と完備な geodesic laminationλ に対して，Thurston は Lipschitz 写像 $f_t\colon (S, m) \to (S, m_t)$ で，λ の測地線に沿ってのみ e^t の割合で引き伸ばされるようなものを構成した．この時 $\mathrm{d}_{\mathrm{Th}}(m_s, m_t) = |s-t|$ となることがわかり，$\{m_t\ (t \in [0,\infty))\}$ は m を始点とする測地半直線になっていて，stretch ray と呼ばれている．Stretch ray の部分弧が stretch path と呼ばれる測地線なのであるが，2 点が stretch path で結ばれるのはごく稀なことである．

しかしながら，$\mathcal{T}(S)$ の任意の 2 点は，d_{Th} についての測地線で結ばれることがわかっている．以下の構成は，任意の 2 点について，有限個の stretch paths を繋げた測地線を得るものである．ただし測地線が全てこのような形をしているわけではない．ここでは，$\mathbb{R}^n$ に L^1-ノルムで距離を入れた時の測地線と似た現象が起きている．

m, n を $\mathcal{T}(S)$ の相異なる 2 点とする．すると (S, m) の chain-recurrent geodesic lamination で，maximal ratio-maximising という性質を持ったもの，$\lambda_{m,n}$ が唯一存在する．chain-recurrent というのは閉測地線の素な和の Hausdorff limit になっているような lamination ということで，$\lambda_{m,n}$ は chain-recurrent geodesic lamination で，測地線方向に $\exp(\mathrm{d}_{\mathrm{Th}}(m,n))$ だけ引き伸ばされ，そのような性質を持ったものの中で，包含関係について最大のものである．測地線を構成する第 1 段階として，$\lambda_{m,n}$ を含む任意の完備な geodesic lamination λ_1 を取り，それについての stretch ray m^1_t を考える．$\lambda_{m^1_t,n}$ は t が 0 に近いときは $\lambda_{m,n}$ と一致するが，ある t_1 において初めて $\lambda_{m^1_{t_1},n}$ は $\lambda_{m,n}$

より真に大きくなり，λ_1 と横断的に交わる．もし $\lambda_{m^1_{t_1},n}$ が完備ならば，それについての stretch path により $m^1_{t_1}$ と n は結べる．そうでなかった場合は，$\lambda_{m^1_{t_1},n}$ を含む完備な geodesic lamination λ_2 を選び，それについての stretch ray m^2_t を考える．すると再び t_2 で $\lambda_{m^2_{t_2}.n}$ が $\lambda_{m^1_{t_1},n}$ より初めて真に大きくなるような t_2 が取れる．そこでまだ $\lambda_{m^2_{t_2},n}$ が完備でなければ，それを含む完備な λ_3 を取り同じ操作を繰り返す．これにより，geodesic laminations の増大列 $\lambda_{m,n} \subsetneq \lambda_{m^1_{t_1},n} \subsetneq \ldots$ が得られるが，このような列の長さは，S の種数で決まる定数で抑えられている．したがって，有限ステップののちに，$\lambda_{m^j_{t_j},n}$ は完備になり，m と n は有限個の stretch paths を繋いだもので結ばれる．この間，$\lambda_{m,n}$ は常に単位速度で引き伸ばされるので，こうしてできた path は測地線であることがわかる．

3　単位接球面の凸構造

この節では，本講演の主結果を述べその説明を加える．我々が主題とするのは任意の $m \in \mathcal{T}(S)$ における接空間 $T_m\mathcal{T}(S)$ にノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{Th}}$ を入れた時の単位球面 $UT_m\mathcal{T}(S)$ の凸球として構造である．

若干の convex geometry の用語を導入する．Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の中のコンパクトな凸体 $\mathcal{B}$ とその境界である凸球 $\mathcal{S}$ を考える．$F \subset \mathcal{S}$ が $\mathcal{S}$ の面であるとは，$\mathcal{B}$ の 2 点を結ぶ線分が内点で F に交わるなら，その端点も必ず F に含まれているようになっていることである．面 F は $\mathrm{Int}\,\mathcal{B}$ と交わらない超平面と $\mathcal{S}$ の交わりとして表される時，露出面であるという．また，$x \in F$ が極点であるとは，x が $\mathcal{S}$ 上の線分の内点とはなり得ないことである．

前節で定義した stretch ray の原点での微分になるような接ベクトルを，stretch vector と呼ぶ．最初の定理は，$UT_m\mathcal{T}(S)$ の面を特徴づけるものである．

定理 3.1 ([1])**.** 任意の $m \in \mathcal{T}(S)$ について，$UT_m\mathcal{T}(S)$ の任意の面 F に対して，*chain-recurrent geodesic lamination* λ が唯一存在し，F は以下のように表示される．

$$F = F_\lambda = \{t_1\mathbf{v}_{\lambda_1} + \cdots + t_k\mathbf{v}_{\lambda_k} \mid k \in \mathbb{N}, t_1 + \cdots + t_k = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \\ \text{は}\lambda\text{を含む } \textit{complete chain-recurrent geodesic laminations}\}.$$

さらに，露出面は以下のように特徴づけられる．

定理 3.2 ([1])**.** 上の定理の F_λ が露出面となる必要十分条件は，λ が横断的測度の台となることである．

最後に，極点について以下がわかる．

定理 3.3 ([1])**.** $v \in UT_m\mathfrak{T}(S)$ が極点であるのは v が *complete chain-recurrent geodesic lamination* に沿った *stretch vector* である時，またその時に限る．

これらの結果の応用として，[2] で証明された Thurston 距離の無限小剛性の別証明を与えることができる．

ここで述べた共同研究が完成したのち，Papadopoulos と共同で，さらに $UT_m\mathfrak{T}(S)$ の凸構造の組み合わせ構造が m によらないことなどを示しているが，時間があれば，これについても講演で触れたい．

References

[1] Bar-Natan, A., Ohshika, K., and Papadopoulos, A. Convex structures of the unit tangent spheres in teichmüller space, 2025.

[2] Huang, Y., Ohshika, K., and Papadopoulos, A. The infinitesimal and global thurston geometry of teichmüller space. *Journal of Differential Geometry to appear* (2025).

[3] Thurston, W. P. Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces. *arXiv.org math.GT* (01 1998). Published in the Collected Works of William P. Thurston, Vol. I, American Mathematical Society, Providence, RI, 2022, p. 533-585.