

# 実1次元解析的微分同相写像の不動点の構造と 葉層構造への応用

三松 佳彦 (中央大学・理工学部)

## 1. 序：主結果

1次元複素力学系理論の、正則微分同相の不動点に関する所謂 parabolic linearization の理論をやや精密に観察することにより、実1次元の実解析的な微分同相の不動点の周囲の領域と微分同相の構造に関する、単純ではあるが強力な構造が導かれる。この観察結果は、複素1次元力学系理論における結果としてもとらえることができ、実1次元の結果としてみた場合を複素化を経由せずに証明することは難しそうである。また、 $C^\infty$ -級の微分同相に対しては、双曲的不動点以外では成り立たない結果である。

余次元1横断的実解析的葉層構造論への強い応用があるので、その核心部分も紹介する。また、さらなる応用の見つからない帰結を一つ紹介する。この帰結の主張が空でないことは、葉層構造論への応用が保証している。

本稿と講演の内容は森田茂之氏（東京大学、東京科学大学名誉教授）、北野晃朗氏（創価大）との共同研究 [KMM] に基づく。

### 1-1. 実解析的微分同相として

まず、実解析的微分同相としての主張を述べる。

$f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  を実1次元の実解析的微分同相芽で向きを保つもの、すなわち、不動点  $x = 0$  における微分係数  $f'(0) > 0$  とする。

**領域の形式的拡大** 主張を述べやすくするために、微分同相芽  $f$  に対して、定義域、値域の正負の部分を実形式的に拡大する。 $f$  が  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ) で定義されており、原点  $0$  以外に不動点はないものとする。 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は平行移動  $T(x) = x + 1$  を表す。また、 $(0, \varepsilon)$ ,  $(-\varepsilon, 0)$  への  $f$  の制限をそれぞれ  $f_+$ ,  $f_-$  と表し、 $\epsilon = \epsilon_\pm = \pm 1$  を  $f_\pm(x) - x$  の符号とする。この時、 $f_+$  と  $T_+ = T^{\epsilon_+}$  に関して同変な解析的埋め込み  $\varphi_+: (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f$  の正の側の形式的拡大という。負の側に対しても同様である。

円周  $S^1$  の実解析構造が一意的であること\*に注意すると、 $f_+$  の軌道空間  $S^1 \cong (0, \varepsilon)/f_+$  の普遍被覆をとれば形式的拡大の存在が分かる。

**定理 R** (Kitano-Mitsumatsu-Morita, [KMM])<sup>†</sup>

上のような解析的微分同相  $f$  と、正・負の側の形式的拡大  $\varphi_+: (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} = M_+$  および  $\varphi_-: (-\varepsilon, 0) \rightarrow \mathbb{R} = M_-$  に対し、 $T_+$  と  $T_-$  に関して同変な実解析的微分同相  $\Phi = \Phi_f: M_- \rightarrow M_+$  が一意的かつ標準的に存在する。

微分同相  $f$  が  $x = 0$  に於いて偶数次で恒等写像  $id$  に接している場合、例えば、 $f(x) = x + x^3$  であれば原点は repelling な不動点であるから、正・負のどちらの側で

本研究は科研費 (課題番号:21H00985, 23K20798, 21K18579, 19K03505) の助成を受けたものである。

\* この古典的事実も恐らく複素化しなければ証明できないであろう。

<sup>†</sup> Andres Navas もこの事実を知っていた。 (@2024年12月 CIRM(Luminy, France))

も backward orbits は原点に集積し、定理にある対応  $\Phi$  は形式的拡大を使わなくても  $(-\varepsilon, 0)$  と  $(0, \varepsilon)$  の対応として直接記述できる。一方、 $f(x) = x + x^2$  の様に  $f$  が奇数次で恒等写像に接している場合には、正の側で repelling であれば負の側では attracting であるから、原点に近い点に対しては相手側では遠い点に対応し、直接に  $(-\varepsilon, 0)$  と  $(0, \varepsilon)$  の対応としては記述しにくい。ため形式的拡大を導入して結果を述べた。

## 1-2. Parabolic Linearization と複素 1 次元力学系としての主張

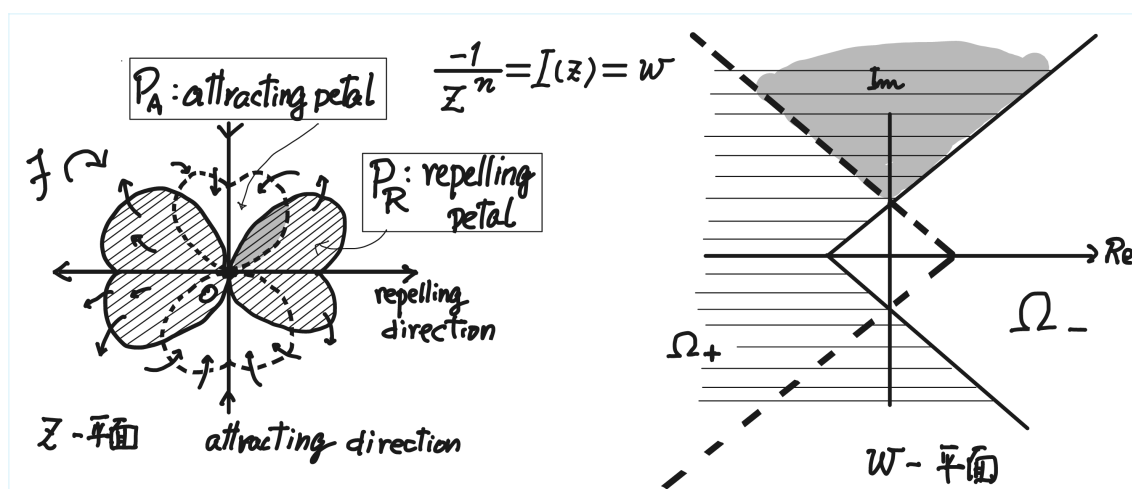
$f(x) = ax + (\text{高次の項})$  ( $a \neq 1, > 0$ ) の場合、つまり、双曲的不動点の場合も基本的に同様であるが、簡単のため、 $f(x) = x + (\text{2次以上の項})$  の場合を考え、変数を複素化して複素 1 変数の原点を不動点に持つ正則微分同相  $f: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$   $f(z) = z + bz^{n+1} + (\text{高次の項})$ , ( $b \neq 0, n \geq 1$ ) として調べる。釈迦に説法で恐縮ではあるが、この  $f(z)$  に対する parabolic linearization を先ずは復習する。(Milnor の教科書 [Mi] と Shishikura [Sh] に従う。)

**註:**  $f(z) = z + bz^{n+1} + (\text{高次の項})$ , ( $b \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1$ ) という形をした正則微分同相 (芽) から始めても同様である。

必要ならば  $f$  を  $f^{-1}$  で取り替え、適当に共役をとることにより、 $f$  は  $f(z) = z + z^{n+1} + az^{2n+1} + (\text{高次の項})$  (Takens 標準形 [Ta]) と仮定できる。 $\arg z = ik\pi/n$  は  $k = 0, 1, \dots, 2n-1$  の順に repelling direction, attracting direction として交互に並び、各 direction を含むように repelling domain, attracting domain が交互に交わりながら並ぶ。これらは repelling petal, attracting petal と呼ばれ、 $P_0, P_1, \dots$  と表す。各  $P_j$  は隣の  $P_{j-1}, P_{j+1}$  とのみ交わり、 $P_0 \cup \dots \cup P_{2n-1} \cup \{0\}$  は  $\mathbb{C}$  における原点の近傍となる。実際、 $w = I(z) = -z^{-n}$  により  $f$  を  $w$ -座標で書き換える、つまり  $I$  での共役の適当な枝をとると、 $I \circ f \circ I^{-1} = \tilde{f}$  は適当な定数  $a$  により

$$\tilde{f}(w) = w + 1 + \frac{a}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right) \quad \text{as } |w| \rightarrow \infty$$

となり、これに対して十分大きな正定数  $b$  により  $w$ -平面の領域  $\Omega_{\pm}$  を  $\Omega_{\pm} = \{w \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Re} w < |\operatorname{Im} w| - b\}$  とおけば、 $I^{-1}(\Omega_{\pm})$  の各連結成分として偶/奇数番目の petal が得られる。



repelling petal  $P_R$  [resp. attracting petal  $P_A$ ] は  $\Omega_+$  [resp.  $\Omega_-$ ] の  $w = I(z) = -(z)^{-n}$  による逆像の  $n$  個ある成分のうちのひとつ。  
水平線で影を施した領域が  $\Omega_+$ , 斜線の領域は repelling petals.

各 petal ごとに  $w$ -平面の領域  $\Omega_{\pm}$  に  $f$  の作用を書き写して  $\tilde{f}$  と表すと、 $\tilde{f}$  の作用は漸近的に  $|w| \rightarrow \infty$  のとき  $\tilde{f}(w) = w + 1$  に収束する。このことより、各 petal には  $f$  の作用が “+1-平行移動” に見える affine 構造  $((\mathbb{C}, +)\text{-torsor})$  が定まり、これを **Fatou 座標** とよぶ。

隣り合う petals の交わりの部分（図の影の部分）での点が定める petal 同士の間の写像は一般にはこの affine 構造を保たないが、エンド ( $w$ -座標で見ると  $\text{Im} \rightarrow \infty$ ,  $z$ -座標では  $\rightarrow 0$ ) ではこの点変換が affine 写像に収束し、隣り合う petal 同士の affine 写像が定まる (定理 C, 1))。  $P_0$  と  $P_1$ ,  $P_1$  と  $P_2, \dots, P_{2n-1}$  と  $P_0$  と一周ぐりぐりとこの同一視を繰り返して元に戻ると、affine 自己同型 (holonomy) であるが恒等写像とは限らず、平行移動の値 **ホロノミー**  $H \in \mathbb{C}$  が  $f$  の一つの不変量となる。

### 定理 C ([KMM])

$f(z)$  を  $f(z) = z + bz^{n+1} + (\text{高次の項})$ , ( $b \neq 0 \in \mathbb{C}, n \geq 1$ ) という形をした正則微分同相 (芽)、即ち、原点 0 を放物的固定点にもつ複素 1 次元正則局所微分同相とする。

- 1) 隣り合う petal の間に affine (同相) 写像が定まる。
- 2)  $f$  が実解析的の場合、holonomy の値  $H$  は純虚数である。

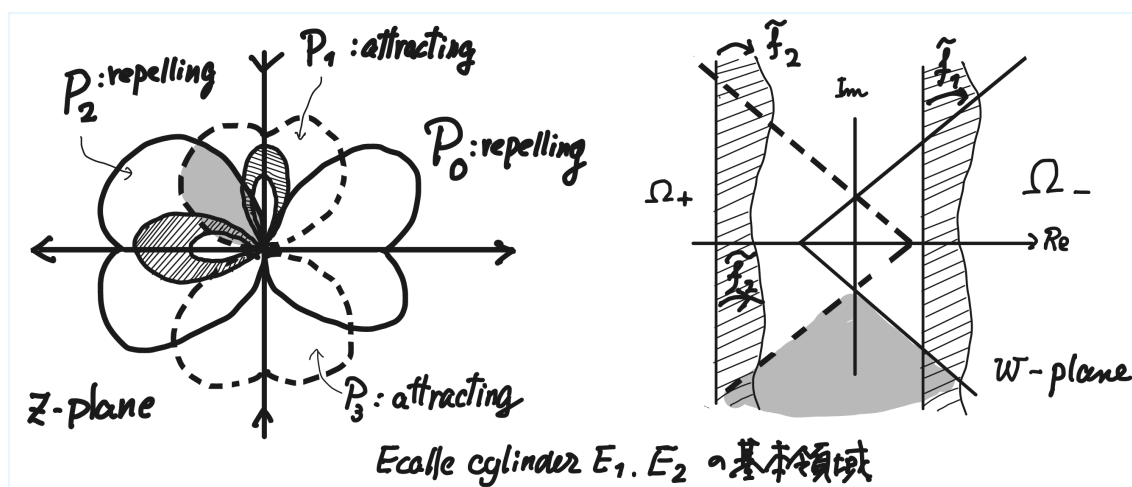
註： 今のところ、この対応の (定理 R の場合でも) より分かり易い記述が見当たらない。恐らく、「共役不変」により特徴づけられるであろう。

### 定理 C $\Rightarrow$ 定理 R

実解析の場合、1 周するのではなく、 $P_0, P_1, P_1, \dots, P_n$  と  $P_0, P_{2n-1}, P_{2n-2}, \dots, P_n$  を複素共役として比較すれば、定理 R を得る。

## 2. 定理 C の証明の概略と図解

各  $P_j$  を  $f$  の作用で割った商空間  $E_j = P_j / f|_{P_j}$  は Ecalle cylinder と呼ばれ、 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  に正則同値であり、 $f$  の作用は被覆  $\mathbb{C} = \tilde{E}_j$  では  $\tilde{w} \mapsto \tilde{w} + 1$  に一致する。 $w$ -座標からみると、 $E_j = \Omega_{\pm} / \tilde{f}_j$  とも見做せる。各 petal  $P_j$  の Fatou 座標が  $\tilde{w}$  に他ならない。

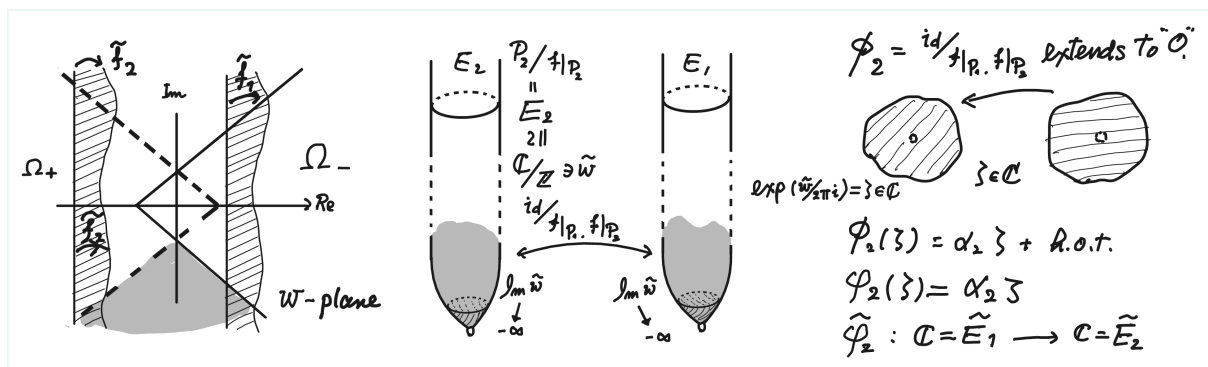


斜線による影がついている領域が Ecalle cylinder  $E_1, E_2$  の基本領域。

灰色の領域が二つの petal  $P_1$  と  $P_2$  の共通部分。

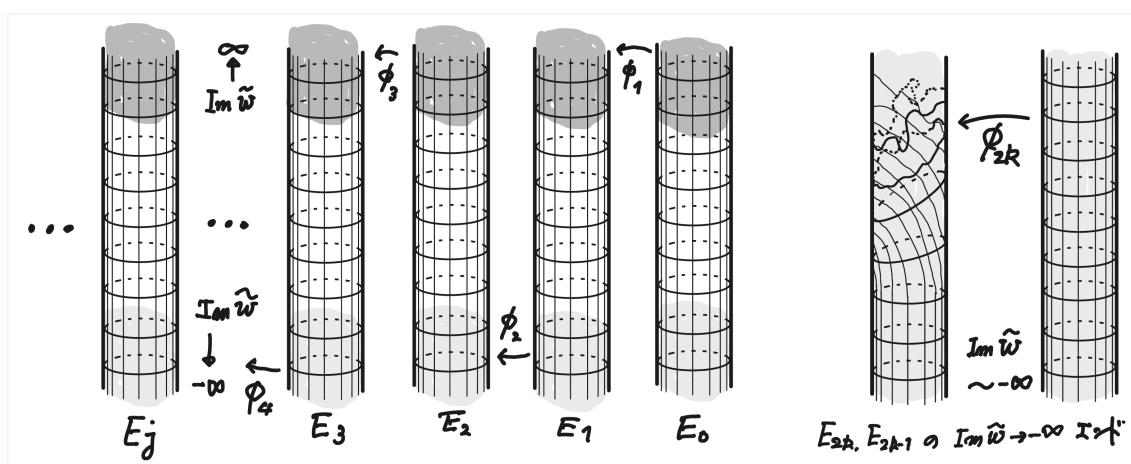
$w$ -座標では  $\text{Im } w \rightarrow -\infty$  の方向に広がっている。

Ecalte cylinder  $E_j \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  の二つのエンドは  $-\sqrt{-1}\infty$ -end と  $\sqrt{-1}\infty$ -end に明確に区別される。 $P_{j-1}$  と  $P_j$  の交わりに従い、Ecalte cylinder 同士の交わりが誘導されるが、 $E_0$  の  $\sqrt{-1}\infty$ -end と  $E_1$  の  $-\sqrt{-1}\infty$ -end が交わり、 $E_1$  の  $-\sqrt{-1}\infty$ -end は  $E_2$  の  $-\sqrt{-1}\infty$ -end と交わる。これらの交わりは実際 end (の付近) では (定義される限りは) 双正則である。各 end の 1 点コンパクト化は  $\mathbb{C}$  の原点の近傍に標準的に双正則であるから、この対応はコンパクト化に拡張し、 $\mathbb{C}$  の座標  $\zeta$  で見ると  $\phi_j(\zeta) = \alpha_j \zeta + (2 \text{ 次以上の項})$  ( $\zeta = \exp(\tilde{w}/2\pi i)$ ) となる。



Ecalte cylinder  $E_1, E_2$  の  $\text{Im } \tilde{w} \rightarrow -\infty$  のエンドの近傍には、 $z$ -平面での tautological な、恒等写像による対応  $\phi_2$  があり、 $\zeta$ -座標では、原点まで正則に拡張する。  
 $\phi_2$  の線形部分を取り出せば、affine 対応が定まる。

2 次以上の項が消えていれば対応は上で述べた affine 構造に関して同型である。元々  $f$  が正則ベクトル場の time 1 写像として与えられていれば、affine 構造はベクトル場によって与えられ、各 petal でも共通のものとなり、以下で述べることも自明に正しい。(隣り合う petal 同士の  $n$  組総てにおいて 2 次以上の項が消えていることと、 $f$  が (局所的な) ベクトル場の積分で与えられることは同値である。)



Sequence of correspondences  $\phi_j$  between Ecalte clinders  $E_{j-1}$  and  $E_j$ .  
 $\phi_j$  は  $\tilde{w}$ -座標では、 $j$  が奇数なら  $\{\text{Im } \tilde{w} : \text{十分大}\}$  で定まり、  
 $j$  が偶数なら  $\{-\text{Im } \tilde{w} : \text{十分大}\}$  で定まる。

そうでない場合は、一般に 2 次以上の項が残り、対応が affine 構造を保たない。然し

乍ら、1次の項のみを（つまり、対応のエンドでの極限を） $\varphi(\zeta) = \alpha_j \zeta$  として取り出せば、affine 写像が隣あう Ecalle cylinder の間に定まり、リフトを取れば  $\tilde{\varphi}_j(\tilde{w}) = \tilde{w} + c_j$  として petal  $P_{j-1}$  と  $P_j$  の間の affine 同型も定まる。 $P_0$  と  $P_1$ ,  $P_1$  と  $P_2, \dots, P_{2n-1}$  と  $P_0$  と一周ぐるとこの同一視を繰り返して元に戻ると、affine 自己同型 (holonomy) であるが恒等写像とは限らず、平行移動の値  $H \in \mathbb{C}$  が  $f$  の一つの不変量となる。

正則ベクトル場の積分の場合は、このホロノミー  $H$  は双対1次微分形式の residue に他ならない。従って、 $z$ -平面の原点の近傍から原点を除いた部分に、この affine 構造の意味で“実部=一定”により、実解析的な余次元1非特異葉層構造（横断的に  $(\mathbb{R}, +)$ -構造をもつ）が定まる。双対1形式の線積分の実部だけを見ることに他ならない。 $f$  が実解析的なものであれば、ホロノミー  $H$  は純虚数となるから、実際、原点を抜いた近傍から  $\mathbb{R}$  への submersion による葉層が得られたことになる。

**問題** ホロノミーの値  $H$  は  $f$  に対して連続にふるまうであろうか。 $f$  の恒等写像への接触次数  $n$  を固定して、 $\{f \mid id_{\mathbb{C}} \text{ への接触次数} = n\}$  のどのような位相に対して連続となるであろうか。特に、ベクトル場の積分で得られるものに限ればホロノミー  $H$  の値はそのベクトル場の双対正則1形式の residue に他ならない。正則ベクトル場の Takens 標準形 [Ta] が

$$(z^{n+1} + \alpha z^{2n+1} + h.o.t.) \frac{\partial}{\partial z}$$

であれば、それが生成する微分同相  $f(z)$  の Takens 標準形は

$$z + z^{n+1} + (\alpha + (n+1)/2)z^{2n+1} + h.o.t.$$

となり、この時のホロノミー = residue は以下で与えられる、

$$H = -2\pi i \alpha.$$

写像  $\Phi_f$  自体についてはどのような連続性が期待されるであろうか。そもそも  $id_{\mathbb{C}}$  への接触次数  $n$  が奇数の場合は問題をどう定式化するべきか。

### 3. 葉層構造論への応用

以下では位相群  $G$  に離散位相を与えたものを  $G\delta$  と記す。円周  $S^1$  の微分同相群の間の恒等写像  $Diff_+^\infty(S^1)^\delta \rightarrow Diff_+^\infty(S^1)$  のホモトピーファイバー  $\widetilde{Diff_+^\infty(S^1)} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow Diff_+^\infty(S^1) \mid \gamma(0) = id\} / \sim$  は、所謂「葉層  $S^1$ -積」  $E = B \times S^1 \twoheadrightarrow B$  の構造群とみなされる。実はこの群は  $Diff_+^\infty(S^1)$  の普遍被覆  $\widetilde{Diff_+^\infty(S^1)}$  に離散位相を与えた群  $\widetilde{Diff_+^\infty(S^1)}^\delta$  に他ならない。また、この群はさらに、実数直線  $\mathbb{R}$  の向きを保つ微分同相の群  $Diff_+^\infty(\mathbb{R})$  における“+1 平行移動”  $T : x \mapsto x + 1$  の中心化群  $\{g \in Diff_+^\infty(\mathbb{R}) \mid g(x+1) = g(x) + 1\}$  の離散化に他ならない。後で  $C^\infty$  ではなく  $C^\omega$  で考えるが、これらの事情は全く同様である。

葉層  $S^1$ -積  $E = B \times S^1 \twoheadrightarrow B$  の全空間上の余次元1葉層構造  $\mathcal{F}$  に対して、全空間からの、葉層構造の分類写像  $\phi_{\mathcal{F}} : E = B \times S^1 \rightarrow B\bar{\Gamma}_1$  の随伴  $B \rightarrow Map(S^1, B\bar{\Gamma}_q) = \Lambda B\bar{\Gamma}_1$  を  $\widetilde{BDiff_+^\infty(S^1)}^\delta$  上の普遍葉層  $S^1$ -積に対してとれば、Mather-Thurston 写像

$$\mathcal{MT} : \widetilde{BDiff_+^\infty(S^1)}^\delta \rightarrow \Lambda(B\bar{\Gamma}_1)$$

が得られる。

**Mather-Thurston の定理 (平坦  $S^1$ -束の場合) ([Ma, Th])**

Mather-Thurston 写像はホモロジー群の間の同型を誘導する。

$$\mathcal{MT}_* : H_*(\widetilde{BDiff_+^\infty(S^1)^\delta}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(\Lambda(B\bar{\Gamma}_q); \mathbb{Z})$$

この  $S^1$ -束の場合の Mather-Thurston の定理は森田 [Mo] により次の定理の証明に用いられた。

**定理 (S. Morita, [Mo])**

$C^\infty$ -級有向平坦円周束のオイラー類 (ただし有理数係数で) の任意の冪  $\chi_{\mathbb{Q}}^k \in H^{2k}(BDiff_+^\infty(S^1); \mathbb{Q})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) は非自明。

Mather-Thurston 写像の  $S^1$ -Borel 商  $\underline{\mathcal{MT}} : BDiff_+^\infty(S^1) \rightarrow \Lambda B\bar{\Gamma}_1^\infty // S^1$  もホモロジー同値写像である。

一方、 $\chi_{\mathbb{Q}}^k$  の非自明性は、実解析的な平坦円周束に対しては  $k \geq 2$  で不明である。

Mather-Thurston の定理を証明するためには、手術や、特に fragmentation が必要であるため、実解析的な場合に成り立つとは考え難いが、オイラー類の冪の問題などを考察するうえでも手掛かりになることが期待されるので、Mather-Thurston 写像を調べる。Mather-Thurston 写像の  $S^1$ -Borel 商  $\underline{\mathcal{MT}} : BDiff_+^\infty(S^1) \rightarrow \Lambda B\bar{\Gamma}_1^\infty // S^1$  も有用なはずである。

横断的有向実解析的余次元1葉層構造の分類空間  $B\bar{\Gamma}_1^\omega$  は Haefliger により  $K(\pi, 1)$ -空間であることが知られており、その基本群  $\Gamma_H$  を *Haefliger 群* と呼ぶ。

**定理 (A. Haefliger, [H])**

- 1)  $B\bar{\Gamma}_1^\omega \simeq K(\Gamma_H, 1)$  : ホモトピー同値
- 2)  $\Gamma_H$  は連続濃度生成の完全群であり、 $Diff_+^\omega(\mathbb{R}) \cup Diff_+^\omega(\mathbb{R}, 0)$  を自然に包含する。

**補題 (Folklore)**

離散群  $G$  の分類空間の自由ループ空間  $\Lambda BG$  の各弧状連結成分は  $g \in G$  の  $G$  における共役類  $C\langle g \rangle$  に対応し、 $g$  の中心化群  $C(g; G)$  の分類空間  $BC(g; G)$  にホモトピー同値である。

実解析的有向平坦円周束に付随する Mather-Thurston 写像とその  $S^1$ -Borel 商を以下の図式に示す。(すべてから  $B$  を取り除いて離散群の順同型の図式と見ても等価)

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{BDiff_+^\omega(S^1)^\delta} \times S^1 & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{F}}} & B\Gamma_H \\ \tilde{p} \wr \downarrow & & \\ BDiff_+^\omega(S^1)^\delta & \xrightarrow{\mathcal{MT}} & BC(\gamma_T; \Gamma_H) \subset \Lambda B\Gamma_H \\ p \wr \downarrow & & \downarrow \\ BDiff_+^\omega(S^1)^\delta & \xrightarrow{\underline{\mathcal{MT}}} & B(C(\gamma_T; \Gamma_H)/\langle \gamma_T \rangle) = BC(\gamma_T; \Gamma_H) // S^1 \end{array}$$

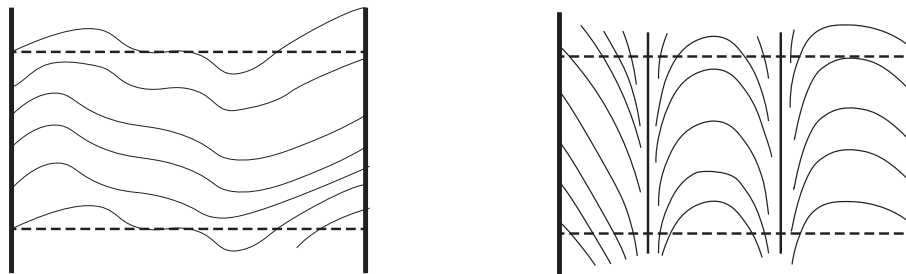
**定理 (実解析的平坦  $S^1$ -束の Mather-Thurston 写像, [KMM])**

上の図式の  $\mathcal{MT}$  及び  $\underline{\mathcal{MT}}$  はともにホモトピー左逆写像を許容する。

この定理の核心は、**定理 R** から導かれる次に定理にある。

### 定理 T ([KMM])

$T^2 = S^1 \times S^1$  上の非特異余次元1横断的有向実解析的な葉層が左下の図の様に  $S^1$  上の葉層  $S^1$ -束であれば、ホロノミーとして  $Diff_+^\omega(S^1)$  の元が定まるが、右下の図の様であっても同様に  $Diff_+^\omega(S^1)$  の元が定まる。

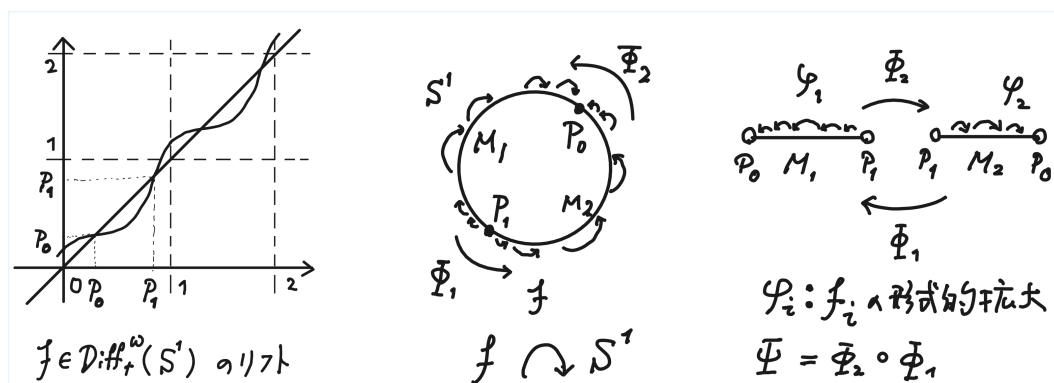


この定理 T も  $C^\infty$ -級のカテゴリーでは成り立ちようのないものである。

### 4. まだ役に立っていない応用

定理 R のもう一つ別の応用を述べる。但し、今のところこの結果が何に役立つのかが分からない。

円周  $S^1$  の向きを保つ実解析的微分同相  $f \in Diff_+^\omega(S^1)^\delta$  は、不動点を有限個しか持たず、もし不動点があれば、不動点の補集合は不動点の数と同じ個数の开区間であって、各开区間(円弧)は  $f$  で不変である。不動点を円順序に従って  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , 各回区間を  $J_i = (P_i, P_{i+1})$   $i = 0, \dots, k-1$  とする。定理 R は不動点  $P_i$  の前後の  $f$ -同変な実解析的同相  $\Phi_i : M_{i-1} \rightarrow M_i$  を与えるので、 $\Psi(f) = \Phi_k \circ \dots \circ \Phi_1 : M_0 \rightarrow M_0$  は  $J_0 \cong \mathbb{R}$  の  $f$ -同変実解析的微分同相を与える。実解析的に  $(M_0, f)$  を  $(\mathbb{R}, T)$  と見直せば、次が得られる。



$S^1$  の実解析的微分同相  $f$  が双曲的不動点を二つ持つ場合



系

上の操作により

$$\Psi : \{ \text{Diff}_+^\omega(S^1) \text{ の共役類} \} \rightarrow \{ \widetilde{\text{Diff}_+^\omega(S^1)} \text{ の共役類} \}$$

が得られ、以下をみたとす。

- 1)  $f \in \text{Diff}_+^\omega(S^1)$  が不動点を持たなければ  $\Psi(f) = id_{\mathbb{R}}$ .
- 2)  $f \in PSL(2; \mathbb{R}) \subset \text{Diff}_+^\omega(S^1)$  であれば  $\Psi(f) = id_{\mathbb{R}}$ .
- 2')  $f \in PSL(2; \mathbb{R})_k$  であれば  $\Psi(f) = id_{\mathbb{R}}$ .
- 3)  $\Psi$  は全射。

$\Psi$  は決してリフトをとっているわけではない。1) は‘定義’ とすべきもの。  $PSL(2; \mathbb{R})_k$  は  $PSL(2; \mathbb{R})$  の  $k$ -重被覆 ( $k \in \mathbb{N}$ )。3) は**定理 T** による。

## 参考文献

- [H] A. Haefliger; *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*. Comment. Math. Helv. **32**, (1958), 248–329.  
A. Haefliger; *Feuilletages sur les variétés ouvertes*. Topology **9**, (1970), 183–194.  
A. Haefliger; *Homotopy and integrability*. Manifolds-Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School), Lecture Notes in Math., Vol. 197 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, 133–163.
- [KMM] T. Kitano, Y. Mitsumatsu, and S. Morita; *The Mather-Thurston map for the flat real analytic circle bundles and the Haefliger group*. Preprint, soon available in arXiv.
- [Mi] J. W. Milnor; *Dynamics in one complex variable*. Annals of Mathematics Studies **160**, Princeton University Press, New Jersey, 2006.
- [Ma] J. N. Mather; *Integrability in codimension 1*. Comment. Math. Helv. **48** (1973), 195–233.  
J. N. Mather; *On the homology of Haefliger’s classifying space*. Differential Topology, V. Villani (Ed.). C.I.M.E. Summer Schools vol. 73 (Springer, 1976), 71–116.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-11102-04>.
- [Mo] S. Morita; *Nontriviality of the Gelfand-Fuchs characteristic classes for flat  $S^1$ -bundles*. Osaka J. Math., **21** no. 3, (1984), 545–563.
- [Sh] M. Shishikura; *Bifurcation of parabolic fixed points*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, 325–363.
- [Ta] F. Takens; *Normal forms for certain singularities of vectorfields*. Annales de l’Institut Fourier, **23** no 2, (1973), 163–195.
- [Th] W. P. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*. Bull. Amer. Math. Soc. **80**, (1974), 304–307.