# 準射影代数多様体上の ケーラー・アインシュタイン計量の境界挙動*

菊田 伸 (工学院大学)†

第 68 回函数論シンポジウム, 茨城大学, 2025 年 10 月 17 日–19 日

**概 要**

非特異準射影代数多様体上において, 負のリッチ曲率を持った (概) 完備ケーラー・アインシュタイン計量の境界近くでの振る舞いを, 境界因子上における対数的標準束の正値性の退化の観点で考察する. この講演では, これまで講演者自身によって得られている成果をまとめて報告する.

## 1 準射影代数多様体上の (概) 完備ケーラー・アインシュタイン計量

$n$ 次元非特異複素射影代数多様体 $\overline{X}$ とその上の非特異複素超曲面 $D := (\sigma = o)$ に対して, 準射影代数多様体 $X := \overline{X} \setminus D$ を考える. $X$ 上にいつ負のリッチ曲率を持つケーラー・アインシュタイン計量が存在するかについては, 対数的標準因子 $K_{\overline{X}} + D$ の正値性の条件下で次の答えが出ている:

**定理 1** (板東 [2], 小林 (亮) [11], Tian-Yau [18]). 対数的標準因子 $K_{\overline{X}} + D$ がネフ且つ巨大, そして $D$ の外では豊富ならば, $X$ は**リッチ曲率が負の概完備ケーラー・アインシュタイン計量** $\omega_X \in c_1(K_{\overline{X}} + D)$ を唯一つ許容する.

概完備とは (Cheng-Yau [3] の意味での) 有界幾何を持つ良い完備計量で近似できるという条件であるが, 実際に $\omega_X$ は完備であるかどうかは未だ不明である. $D$ の近傍で $\omega_X$ は, $D$ の法方向では穴あき円盤のポアンカレ計量と同値であると期待されているが, $D$ と平行な方向においては $D$ に近づくと退化する可能性があり, それゆえ有界幾何を持たないことも起こり得る. その点で所謂ポアンカレ増大度を持つ計量やカスプ特異点を持つ計量とは一線を画す. (有界幾何を持つが) 典型的な具体例としては, 複素双曲空間やジーゲルモジュラー多様体などの局所エルミート対称空間 $X$ のトロイダルコンパクト化 $\overline{X} = X \cup D$ と, その上のベルグマン計量 $\omega_X$ である ([1], [15]). 非コンパクトな完備リーマン多様体上では, ラプラシアンのスペクトル等の幾何学的な情報を得るためには, 計量の無限遠 (この場合では $D$ のこと) への漸近挙動

*本研究は JSPS 科研費 16K17599, 21K03232 の助成を受けたものである.
†e-mail : skikuta@cc.kogakuin.ac.jp

を理解することが不可欠である. その上, 標準計量を考えている点で「$(X, \omega_X)$ **に対して $D$ の近くでの挙動を調べる**」ことは, 代数幾何学への応用の面でも重要な問題と思われる.

以下では, この存在定理の仮定を強めた「**対数的標準因子 $K_{\overline{X}} + D$ が半豊富, そして $D$ の外では豊富である**」状況で, 「**対数的標準因子 $K_{\overline{X}} + D$ の豊富性が $D$ において退化する**」ことに着目して, この問題について考察する.

この問題の先行研究として, $D$ において退化しない状況においては, $\omega_X$ は次の様な漸近を持つことが示された (高次の漸近については Jiang-Shi [8] や Rochon-Zhang によって得られている):

**定理 2** (小林 (亮) [11], G. Schumacher [16]). $K_{\overline{X}} + D$ が $\overline{X}$ 全体で豊富ならば, 次の留数の公式 ($\mathrm{R}_{n-1}$) と体積増大度の公式 ($\mathrm{V}_{n-1}$) が成り立つ :

$$\mathrm{Res}_D\, \omega_X = \omega_D \tag{$\mathrm{R}_{n-1}$}$$

$$(\omega_X)^n = \frac{V}{\|\sigma\|^2(-\log\|\sigma\|^2)^2} \tag{$\mathrm{V}_{n-1}$}$$

ここで, $D$ **に沿った留数** $\mathrm{Res}_D\, \omega_X$ の定義は $\mathrm{Res}_D\, \omega_X := \lim_{\epsilon \to o} \omega_X|_{(\sigma = \epsilon)}$ である. また $V$ と $\|\cdot\|^2 = h(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ適切な $\overline{X}$ 上の特異体積形式と非特異エルミート計量である.

この場合は, 随伴公式 $(K_{\overline{X}} + D)|_D = K_D$ と Aubin-Yau の結果によって, $D$ は負のリッチ曲率を持ったケーラー・アインシュタイン計量 $\omega_D$ を持つことに注意する. また $D$ の多様体としての小平次元 $\kappa(D)$ は $\kappa(D) = n-1$ である.

## 2 一般化されたケーラー・アインシュタイン計量, 小平次元と漸近挙動

対数的標準因子 $K_{\overline{X}} + D$ の豊富性が $D$ において真に退化する場合, 上述の留数と体積増大度の公式はどのように変化するだろうか. つまり, 境界の標準因子 $K_D = (K_{\overline{X}} + D)|_D$ の正値性が退化する場合である. この場合は, 勿論 $D$ は負のリッチ曲率を持ったケーラー・アインシュタイン計量を持たない. また $D$ **の小平次元** $\kappa(D)$ も $0 \le \kappa(D) \le n-1$ の範囲全てとりうる.

まず $D$ 上のケーラー・アインシュタイン計量の代替としては, Song-Tian 及び辻によって導入された次の標準計量ではないかと私は予想している.

**定理 3** (Song-Tian [17], 辻). $m$ 次元非特異複素射影代数多様体 $Y$ は半豊富な標準因子 $K_Y$ を持ち, その小平次元を $\kappa = \kappa(K_Y)$ とする. そして $Y_{\mathrm{can}}$ を $Y$ の標準モデル, $\varphi = \varphi_{|lK_Y|} : Y \to Y_{\mathrm{can}}$ を多重標準写像, $Y^\circ_{\mathrm{can}}$ は $\varphi$ の滑らかなファイバーを与える非特異点から成る $Y_{\mathrm{can}}$ の部分集合とする. このとき, 次を満たす**一般化されたケーラー・アインシュタイン計量 (又は標準計量)** と呼ばれる $Y_{\mathrm{can}}$ 上の正閉 $(1,1)$-カレント $\omega_{\mathrm{can}}$ がただ一つ存在する:

(1) $\omega_Y := \varphi^* \omega_{\mathrm{can}} \in c_1(K_Y)$

(2) $\omega_{\mathrm{can}}$ は $Y_{\mathrm{can}}^{\circ}$ で滑らかであり, $\Omega_{\mathrm{can}} := \omega_Y^{\kappa} \wedge \Theta$ は $Y$ 上の連続な体積形式 (**標準測度**と呼ばれる) を定める
($\Theta$ : $\varphi$ の各ファイバーのカラビ・ヤウ体積形式を並べた $(n-\kappa, n-\kappa)$-形式)

(3) $\omega_{\mathrm{can}}$ は次の**一般化されたケーラー・アインシュタイン方程式**を満たす :

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\mathrm{can}}) = -\omega_{\mathrm{can}} + \omega_{\mathrm{WP}} \ \text{ on } \ Y_{\mathrm{can}}^{o} \quad (\omega_{\mathrm{WP}} : \varphi \text{ のヴェイユ・ピーターソン計量})$$

辻氏 [20] は $\kappa = m$ の場合 ($Y$ が一般型) に特に考察しており, $\omega_Y$ は特異ケーラー・アインシュタイン計量 (またはケーラー・アインシュタイン カレント) と呼ばれている. また $\kappa = 0$ の場合 ($Y$ がカラビ・ヤウ多様体) は $\omega_Y = o$ とみなす. この計量の応用として, 射影族に対する相対標準束の正値性などがあり, 極小モデル理論との関連や代数幾何学における大きな問題の解決に役立つことが期待されている.

またケーラー・リッチ流との関係についても, 様々な結果 (Song-Tian [17], 辻 [20], Tian-Zhang [19] など) の後, 次の最終形が近年得られた:

**定理 4** (Hein-Lee-Tosatti [7])**.** $Y$ を半豊富な標準因子を持つ非特異複素射影代数多様体とし, $0 < \kappa(K_Y) \leq n$ とする. このとき, 任意のケーラー計量 $\omega_0$ を出発する $Y$ 上の (正規化された) ケーラー・リッチ流 $\omega_Y(t)$ は, $t \to \infty$ で一般化されたケーラー・アインシュタイン計量 $\omega_Y$ に $Y_{\mathrm{can}}^{o}$ 上で $C_{\mathrm{loc}}^{\infty}$ の意味で収束する.

そこで退化版の留数と体積増大度の公式に関して, 小林 (亮) と Schumacher の定理 2 に倣った講演者の予想を定式化すると次の様になる (($\mathrm{R}_0$) は自明なので ($\mathrm{R}_0'$) に置き換える):

**予想.** $\kappa = 0, 1, \cdots, n-1$ に対して

$$\kappa(D) = \kappa \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Res}_D\, \omega_X = \omega_D \tag{$\mathrm{R}_\kappa$}$$

$$\kappa(D) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Res}_D\, (-\log \|\sigma\|^2)\, \omega_X = (n+1)\, \omega_{\mathrm{CY}} \tag{$\mathrm{R}_0'$}$$

$$\kappa(D) = \kappa \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\omega_X)^n = \frac{V}{\|\sigma\|^2(-\log \|\sigma\|^2)^{n+1-\kappa}} \tag{$\mathrm{V}_\kappa$}$$

ここで, $V$ と $\|\cdot\|$ はそれぞれ適切な $\overline{X}$ 上の特異体積形式と非特異エルミート計量で, $V$ の零集合は $D$ 全体ではない多重極集合とする. また $\omega_{\mathrm{CY}}$ は $D$ の余法束 $-N_D$ に対応するカラビ・ヤウ計量 (リッチ平坦ケーラー計量) である.

勿論, 定理 2 はこの予想の $K_D$ が豊富である場合 ($\kappa = n-1$ の一部) が成り立つことを表している. それ以外にも, この形で明確に主張してはいないものの, この予想をサポートしている例はいくつか存在する.

## 3 境界が一般型の場合

対数的標準束 $K_{\overline{X}} + D$ が豊富である場合は $\kappa(D) = n-1$ であるが, 逆は成り立たない. $\kappa(D) = n-1$ であるとき $K_D$ は巨大であるといい, $D$ は一般型と呼ばれる.

$K_D$ が豊富からどのくらい違うかを表すのが, 非豊富集合 $\mathbf{B}_+(K_D)$ である. この場合 $D$ 上の特異ケーラー・アインシュタイン計量 $\omega_D$ は $\mathbf{B}_+(K_D)$ の外で滑らかで, 満たす方程式もそこでの通常のケーラー・アインシュタイン方程式である. $\kappa(D) = n-1$ の場合の予想に対しては, 以下の成果を得ている：

**定理 5** ([9], [10])**.** $\kappa = n-1$ の場合の留数予想 ($\mathrm{R}_{n-1}$) と体積増大度予想 ($\mathrm{V}_{n-1}$) は正しい. すなわち,

(1) $\kappa(D) = n-1$ のとき, $D$ 上の特異ケーラー・アインシュタイン計量 $\omega_D$ に対し

$$\mathrm{Res}_D\, \omega_X = \omega_D \tag{$\mathrm{R}_{n-1}$}$$

が成り立つ.

(2) 次は同値である：

$$\kappa(D) = n-1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\omega_X)^n = \frac{V}{\|\sigma\|^2(-\log\|\sigma\|^2)^2}. \tag{$\mathrm{V}_{n-1}$}$$

ただし, $V$ は非豊富集合 $\mathbf{B}_+(K_D)$ でのみ零になる有界体積形式である.

この定理の証明の方針を述べる. まず ($\mathrm{R}_{n-1}$) と ($\mathrm{V}_{n-1}$) の $\Longrightarrow$ について, Schumacher の証明では, $K_{\overline{X}} + D$ が $D$ 上でも豊富であることから, $\omega_D$ の $\overline{X}$ への拡張定理を適用できた. しかし, 巨大の状況では拡張定理が成り立つかが不明であるため, $X$ 上の (正規化) ケーラー・リッチ流 (Lott-Zhang [13]) と $D$ 上のケーラー・リッチ流 (定理 4) によって, それぞれ $\omega_X$ と $\omega_D$ を近似した. その際, ケーラー・リッチ流の留数がケーラー・リッチ流であることが鍵となる. この方法では, $t$ に関する極限と境界に近づける極限の 2 つの極限が現れるので, 結論を得るためにはその順序を交換する必要があり, そこで $K_D$ の巨大性の下でよく使われる所謂「辻のトリック」を用いる.

($\mathrm{V}_{n-1}$) の $\Longleftarrow$ については, まずポテンシャル論におけるリースの分解定理を用いると, 体積の式から $\log(V/h)|_D$ は複素モンジュ・アンペール方程式の劣解であることが導かれる. その不等式を S. Boucksom による体積 $\mathrm{vol}(K_D)$ の積分表示公式に適用することで, その体積の正値性, 即ち $K_D$ の巨大性をもたらす.

## 4 境界がカラビ・ヤウの場合

次に $\kappa(D) = 0$ の状況で予想を考える. $D$ は楕円曲線, アーベル多様体, K3 曲面などを含み, (広い意味で) カラビ・ヤウ多様体と呼ばれる. まず随伴公式より $D$ の余法束 $-N_D$ は豊富であり, $D$ 上にカラビ・ヤウ計量 $\omega_{\mathrm{CY}} \in c_1(-N_D)$ が存在することに注意する. この場合の $\overline{X}$ の具体例を与えるのは複素双曲多様体 $X$ のトロイダルコンパクト化であり, それに対する予想 2 は正しいことが既に計算されている.

**例 1** (N. Mok [14])**.** 複素双曲多様体 $X=\mathbb{B}^n/\Gamma$ のトロイダルコンパクト化を $\overline{X}$ とする (一意に定まる). 境界因子は $\partial\mathbb{B}^n$ への $\Gamma$ の作用の放物的固定点 $p$(の軌道) と対応する. $p$ に関する $\mathbb{B}^n$ のジーゲル上半平面モデル $\operatorname{Im} s>|z^1|^2+|z^2|^2+\cdots+|z^{n-1}|^2$ を取り, その $z=(z^1,z^2,\cdots,z^{n-1})$ に対応するユークリッド部分 $\mathbb{C}^{n-1}$ について, $\Gamma$ から誘導される格子による商として得られるアーベル多様体が境界因子 $D$ である. ある整数 $m$ や正定数 $c$ を適切に取ると, $\sigma=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}s}$, $h=e^{c|z|^2}$ が $\overline{X}$ 上のものとして定まり, $\mathbb{B}^n$ 上のポアンカレ・ベルグマン計量から誘導される $X$ 上のケーラー・アインシュタイン計量 $\omega_X=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\dfrac{1}{(1-|w|^2)^{n+1}}$, $w\in\mathbb{B}^n$ は $D$ の近傍で

$$\begin{aligned}\omega_X&=\frac{1}{2\pi}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\frac{1}{(\operatorname{Im}s-|z|^2)^{n+1}}\\&=\frac{n+1}{2\pi}\left(\frac{c\sqrt{-1}}{-\log\|\sigma\|^2}dz\wedge d\overline{z}+\frac{\sqrt{-1}d\sigma\wedge d\overline{\sigma}}{\|\sigma\|^2(-\log\|\sigma\|^2)^2}\right),\\(\omega_X)^n&=\frac{nc^{n-1}\left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^n}{\|\sigma\|^2(-\log\|\sigma\|^2)^{n+1-0}}\left(\sqrt{-1}dz\wedge d\overline{z}\right)^{n-1}\wedge\sqrt{-1}d\sigma\wedge d\overline{\sigma}\end{aligned}$$

の形をしていることが分かる. この結果 $(\mathrm{R}_0')$ や $(\mathrm{V}_0)$ を確認することができる.

この例以外の場合にも, 次のより一般的な状況では予想 2 の正しさを証明することができた. 複素曲面の場合は小林 (亮) 氏 [12] も同じことを示している.

**定理 6** ([10])**.** $\kappa=0$ の場合の留数予想 $(\mathrm{R}_0')$ と体積増大度予想 $(\mathrm{V}_0)$ に関して, 次の状況では正しい. すなわち,

(1) $D$ がアーベル多様体の非特異有限商のとき, $D$ 上のカラビ・ヤウ計量 $\omega_{\mathrm{CY}}\in c_1(-N_D)$ に対し

$$\operatorname{Res}_D(-\log\|\sigma\|^2)\,\omega_X=(n+1)\,\omega_{\mathrm{CY}}\qquad(\mathrm{R}_0')$$

が成り立つ.

(2) 体積増大度予想 $(\mathrm{V}_0)$ の次の部分は常に成り立つ.

$$\kappa(D)=0\qquad\Longrightarrow\qquad(\omega_X)^n=\frac{V}{\|\sigma\|^2(-\log\|\sigma\|^2)^{n+1}}.\qquad(\mathrm{V}_0)$$

ただし, $V$ はゼロにならない有界体積形式である.

(1) では, 境界因子は共通しているが, $\overline{X}$ 自体は複素双曲多様体のトロイダルコンパクト化であるとは限らないことに注意する.

この定理の証明では, Grauert の定理を用いて $D$ の近傍を $N_D$ の零セクションの近傍と同一視することで計算を行う. 例えば, $\omega_X$ を $D$ の近傍で良く近似する参考計量 $\hat{\omega}_X$ を, $\omega_{\mathrm{CY}}$ を用いて標準的な方法で構成し, その曲率を計算することが可能である. それによって $\hat{\omega}_X$ が有界幾何を持つことと, $D$ がアーベル多様体の非特異有限商(つまり平坦多様体) であることが同値であることが判明する. (1) と (2) で扱える範

囲の違いが出る理由として大きいのはこの部分で, (1) では複素モンジュ・アンペール方程式に有界幾何の解析の手法を応用し, 適切な解の評価を実行できた. (1) の状況では, Fang-Fu [5], Fu-Hein-Jiang [6] によって高階の漸近展開も得られており, それの帰結としても (1) が従う. この方法が利用できない (2) については, また $X$ 上のケーラー・リッチ流 $\omega_X(t)$ によって $t \to \infty$ での $\omega_X$ の近似を行う. 有限時間 $t$ では非退化の状況なので, 体積形式 $\omega_X(t)^n$ の $\log$ の冪は 2 であるが, $t \to \infty$ のときに $\log$ の冪が $n+1$ に繋げられる補助関数を見つけ, それを含めた解の一様評価をすることで証明を行った. 対数的標準特異点の観点から, 局所的ではあるが似た状況で関連する研究も行われている ([4]).

## 5　境界が中間小平次元の場合

最後に $0 < \kappa(D) < n-1$ の場合の予想 2 について紹介する. 実は一般的な結果はまだ得られておらず, (対数版ではあるが) 典型例を与えるジーゲルモジュラー多様体のトロイダルコンパクト化に関して, W. Wang と Yau-Zhang による先行研究の計算の続きを少し行い, 新たな解釈を与えたに過ぎない.

**例 2** ([10], W. Wang [21], Yau-Zhang [22], [23])**.** *次数が $g \in \mathbb{N}$ のジーゲルモジュラー多様体 $X = S_g/\Gamma$ のトロイダルコンパクト化を $\overline{X}$ とする. このコンパクト化はある扇の族を用いて定義され ([1]), その扇に依存するため一般に $\overline{X}$ もその境界因子も一意性はない. 更に境界因子は単純正規交差を持ち, $D_1 + D_2 + \cdots + D_N$ と表せるため, 我々の仮定を満たさない. 従って, ここでは $i = 1, 2, \cdots, N$ に対して $D_i \setminus \bigcup_{j\neq i} D_j$ の近傍のみ考察することにする. 簡単のため $i$ を固定し, $D := D_i$, $D^\circ := D_i \setminus \bigcup_{j\neq i} D_j$ と単純に表す. 実はこの集合とその近傍は扇に依存せずに決まっている. $D^\circ$ は $\Gamma$ の作用で固定される $\partial S_g$ の深さが 1 の放物的境界成分 (カスプ) $C$ と対応する. $C$ の例としては, 標準的境界成分と呼ばれる*

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c|c} w' & \mathbf{0} \\ \hline {}^t\mathbf{0} & 1 \end{array} \right] \quad ; \quad w' \in S_{g-1} \right\}$$

*があるが, 簡単のためとこれが $C$ であるとする. $C$ に関する $S_g$ のジーゲル上半平面モデル $\mathbb{H}_g : \mathrm{Im} \left[ \begin{array}{c|c} z' & z'' \\ \hline {}^t z'' & s \end{array} \right] > 0$ を取り, その $z'$ に対応する $\mathbb{H}_{g-1} \simeq S_{g-1}$ と, $z''$ に対応するユークリッド部分 $\mathbb{C}^{g-1}$ について, $\Gamma$ から誘導される $\mathbb{H}_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1} \simeq S_{g-1} \times \mathbb{C}^{g-1}$ への算術群の作用による商が $D^\circ$ である. よって, $S_{g-1}$ 成分への作用を $\Gamma'$ と表したとき*

$$\varphi : D^\circ \to X' := S_{g-1}/\Gamma'$$

*という定空間が次数の 1 つ小さいジーゲルモジュラー多様体であるファイバー空間の構造が $D^\circ$ に入る. $z'$ でのファイバーは, $\mathbb{Z}^{g-1} + z'\,\mathbb{Z}^{g-1}$ の形の格子 (と有限群) による $\mathbb{C}^{g-1}$ の商で, つまりアーベル多様体の有限商である. 従って, $D^\circ$ の (対数的) 小*

平次元は $\kappa(D^\circ) = \dim X' = \dfrac{g(g-1)}{2}$ で, ヴェイユ・ピーターソン計量は

$$\omega_{\mathrm{WP}} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\det\operatorname{Im} z'$$

となる. ある整数 $m$ を適切に取ると, $\sigma = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}s}$ が $D^\circ$ の近傍上のものとして定まり, $S_g$ 上のベルグマン計量から誘導される $X$ 上のケーラー・アインシュタイン計量 $\omega_X = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\dfrac{1}{\det(1_g - ww^*)^{g+1}}$, $w \in S_g$ は $D$ の近傍で

$$\omega_X = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\frac{1}{\left(\det\operatorname{Im}\left[\begin{array}{c|c} z' & z'' \\ \hline {}^t z'' & s\end{array}\right]\right)^{g+1}},$$

$$(\omega_X)^{\frac{g(g+1)}{2}} = \frac{v}{|\sigma|^2(-\log|\sigma|^2)^{g+1}}\left(\sqrt{-1}dz'\wedge d\overline{z}'\right)^{\frac{g(g-1)}{2}}\wedge\left(\sqrt{-1}dz''\wedge d\overline{z}''\right)^{g-1}\wedge\sqrt{-1}d\sigma\wedge d\overline{\sigma}$$

の形をしていることが分かる ($v$ は有界な正値関数). 従って $g+1 = \dim X + 1 - \kappa(D^\circ)$ が成り立ち, $(\mathrm{V}_{\frac{g(g-1)}{2}})$ の体積増大度を満たす. $D^\circ$ に沿った留数については,

$$\operatorname{Res}_{D^\circ}\omega_X = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\frac{1}{(\det\operatorname{Im} z')^{g+1}} = \frac{g+1}{g}\omega_{X'}$$

と計算できるので, $\operatorname{Res}_{D^\circ}\omega_X$ は一般化されたケーラー・アインシュタイン方程式

$$\operatorname{Ric}\left(\operatorname{Res}_{D^\circ}\omega_X\right) = -\omega_{X'} = -\operatorname{Res}_{D^\circ}\omega_X + \omega_{\mathrm{WP}}$$

の解である. この結果 $(\mathrm{R}_{\frac{g(g-1)}{2}})$ も確認できた.

## 参考文献


[1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y.-S. Tai, *Smooth compactifications of locally symmetric varieties*, 2nd ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. With the collaboration of Peter Scholze.

[2] S. Bando, *Einstein Kähler metrics of negative Ricci curvature on open Kähler manifolds*, Kähler metric and moduli spaces, Adv. Stud. Pure Math., vol. 18, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 105–136.

[3] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 4, 507–544.

[4] V. Datar, X. Fu, and J. Song, *Kähler-Einstein metrics near an isolated log-canonical singularity*, J. Reine Angew. Math. **797** (2023), 79–116.

[5] H. Fang and X. Fu, *On the construction of a complete Kähler-Einstein metric with negative scalar curvature near an isolated log-canonical singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. **149** (2021), no. 9, 3965–3976.

[6] X. Fu, H.-J. Hein, and X. Jiang, *Asymptotics of Kähler-Einstein metrics on complex hyperbolic cusps*, Calc. Var. Partial Differential Equations **63** (2024), no. 1, Paper No. 6, 34.

[7] H.-J. Hein, M.-C. Lee, and V. Tosatti, *Collapsing immortal Kähler-Ricci flows*, Forum Math. Pi **13** (2025), Paper No. e18, 98.

[8] X. Jiang and Y. Shi, *Asymptotic expansions of complete Kähler-Einstein metrics with finite volume on quasi-projective manifolds*, Sci. China Math. **65** (2022), no. 9, 1953–1974.

[9] S. Kikuta, *Boundary behavior of Kähler-Einstein metric of negative Ricci curvature over quasi-projective manifolds with boundaries of general type*, Kodai Math. J. **44** (2021), no. 1, 81–114.

[10] ———, *Volume growth of Kähler-Einstein metric over quasi-projective manifolds with boundary of maximal or minimal Kodaira dimension*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[11] R. Kobayashi, *Kähler-Einstein metric on an open algebraic manifold*, Osaka J. Math. **21** (1984), no. 2, 399–418.

[12] ———, *Einstein-Kaehler metrics on open algebraic surfaces of general type*, Tohoku Math. J. (2) **37** (1985), no. 1, 43–77.

[13] J. Lott and Z. Zhang, *Ricci flow on quasi-projective manifolds*, Duke Math. J. **156** (2011), no. 1, 87–123.

[14] N. Mok, *Projective algebraicity of minimal compactifications of complex-hyperbolic space forms of finite volume*, Perspectives in analysis, geometry, and topology, Progr. Math., vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, pp. 331–354.

[15] D. Mumford, *Hirzebruch's proportionality theorem in the noncompact case*, Invent. Math. **42** (1977), 239–272.

[16] G. Schumacher, *Asymptotics of Kähler-Einstein metrics on quasi-projective manifolds and an extension theorem on holomorphic maps*, Math. Ann. **311** (1998), no. 4, 631–645.

[17] J. Song and G. Tian, *Canonical measures and Kähler-Ricci flow*, J. Amer. Math. Soc. **25** (2012), no. 2, 303–353.

[18] G. Tian and S.-T. Yau, *Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry*, Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), Adv. Ser. Math. Phys., vol. 1, World Sci. Publishing, Singapore, 1987, pp. 574–628.

[19] G. Tian and Z. Zhang, *On the Kähler-Ricci flow on projective manifolds of general type*, Chinese Ann. Math. Ser. B **27** (2006), no. 2, 179–192.

[20] H. Tsuji, *Existence and degeneration of Kähler-Einstein metrics on minimal algebraic varieties of general type*, Math. Ann. **281** (1988), no. 1, 123–133.

[21] W. Wang, *On the smooth compactification of Siegel spaces*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 2, 351–386.

[22] S.-T. Yau and Y. Zhang, *The geometry on smooth toroidal compactifications of Siegel varieties*, Amer. J. Math. **136** (2014), no. 4, 859–941.

[23] ———, *Hodge bundles on smooth compactifications of Siegel varieties and applications*, ICCM Not. **7** (2019), no. 2, 1–18.