正則関数からなるヒルベルト空間の
不変部分空間について

泉池　耕平（山口大学）

1　はじめに

正則関数空間における不変部分空間の研究は，1949 年に Beurling によって，Hardy 空間の不変部分空間における完全な特徴付けが得られて以降，様々な正則関数空間の不変部分空間の研究が行われてきた。一般的に，線形空間 H を Hilbert 空間とし，T を H 上の有界線形作用素とする。そのとき，H の閉部分空間 M に対して

$$TM \subset M$$

を満たすとき，M は T に対して不変であるという。その中で，特に H が正則関数からなる Hilbert 空間の場合，座標関数の掛け算作用素に対して不変である閉部分空間を単に不変部分空間という。本講演では、1 変数の正則関数からなる Hilbert 空間（以下，正則ヒルベルト空間と呼ぶことにする）の不変部分空間の代表的な性質について紹介し，それと比較しながら 2 変数 Hardy 空間の不変部分空間についての結果を紹介していく。

2　1 変数の正則 Hilbert 空間

2.1　Hardy 空間

複素数平面 $\mathbb{C}$ の単位開円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上の正則関数全体を $Hol(\mathbb{D})$ で表す。$\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ は，次のように定義される空間である。

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) \,\middle|\, \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty \right\}$$

この空間の不変部分空間は，Beurling により次のような完全な特徴付けが知られている。

Beurling の定理 ([2])

M を $H^2(\mathbb{D})$ の閉部分空間とする。そのとき，次は同値である：

(1) M が不変部分空間である

(2) $M = \varphi(z)H^2(\mathbb{D})$,　φ は内部関数

この定理より，不変部分空間 M に対して，

$$M \ominus zM = \mathbb{C} \cdot \varphi(z), \quad [M \ominus zM] = [\{\varphi(z)\}] = \varphi(z) H^2(\mathbb{D}) = M$$

となることがわかる。ここで，集合 $E \subset H^2(\mathbb{D})$ に対して，$[E]$ は E を含む最小の不変部分空間を表す。このことから，不変部分空間 M を生成するのに必要な関数の最小個数を $\mathrm{rank}\,(M)$ で表すことにすると，$H^2(\mathbb{D})$ では

$$\dim(M \ominus zM) = \mathrm{rank}\,(M) = 1$$

が常に成り立つことがわかる。

2.2 Bergman 空間

不変部分空間の研究が盛んに行われている正則ヒルベルト空間として，Bergman 空間がある。$\mathbb{D}$ 上の Bergman 空間は次のように定義される：

$$L_a^2(\mathbb{D}) := \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) \,\middle|\, \|f\|_{L_a^2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dA(z) < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} \, dA(z).$$

この Bergman 空間においては，$H^2(\mathbb{D})$ における Beurling の定理のような完全な特徴付けは得られていない。その理由の一つが，$L_a^2(\mathbb{D})$ では，任意の $1 \leq k \leq \infty$ に対して $\mathrm{rank}\,(M) = k$ となる不変部分空間 M が存在し，Hardy 空間と比べ状況が複雑であることが挙げられる。しかし，Hardy 空間と同様に，次のことが Aleman-Richter-Sundberg によって示されている：

Aleman-Richter-Sundberg の定理 ([1])

M を $L_a^2(\mathbb{D})$ の不変部分空間とする。そのとき，

$$[M \ominus zM] = M$$

$L_a^2(\mathbb{D})$ では必ずしも $\mathrm{rank}\,(M) = 1$ ではない。この定理より，

$$\dim(M \ominus zM) = \mathrm{rank}\,(M)$$

であることが直ちにわかる。また，Shimorin によって，一般的に次が成り立つことが示されている：

Shimorin の定理 ([9])

T を Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素とする。そのとき，T が 2 つの条件

(a) $\|Tx + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|Ty\|^2), \quad x, y \in H$

(b) $\bigcap \{T^n H : n \geq 0\} = \{0\}$

を満たすならば，$H = [H \ominus TH]$ である。

有界線形作用素 T が (a) と (b) を満たすならば，T に対する任意の不変部分空間 $M \subset H$ に対して $T|_M : M \to M$ もまた (a) と (b) を満たす。Shimorin はこの定理を用いて，Aleman-Richter-Sundeberg の定理により簡単な証明を与えた。この定理については、さらに簡単な証明を得ている：

定理 ([5])

T を Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素とする。そのとき，T が次の条件

(i) $\|Tx\|^2 + \|T^{*2}Tx\|^2 \leq 2\|T^*Tx\|^2, \quad x \in H$

(ii) 次を満たす $c > 0$ が存在する： $\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad x \in H$

(iii) $\|T\| \leq 1$

(iv) 任意の $x \in H$ に対して，$\|T^{*k}x\| \to 0$（$k \to \infty$）

を満たすならば，$H = [H \ominus TH]$ である。

この証明は，Sun-Zheng からアイディアを得ている。これを Bergman 空間 $L^2_a(\mathbb{D})$ の不変部分空間 M について適用する（つまり $H = M$，$T = T_{z|M}$）と，(i),(ii),(iii),(iv) について比較的容易に成り立つことがわかる。この証明は関数解析の基本的な手法と比較的に容易な計算のみで為されており，現時点で Aleman-Richter-Sundberg の定理の最も簡単な証明方法であると思っている。また実際には，表現に違いはあるが，Shimorin の定理と同値の主張となっている。

3　2 変数 Hardy 空間

ここからは，2 変数の Hardy 空間について考える。2 次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ の 2 つの変数を z, w とし，2 重単位円板

$$\mathbb{D}^2 = \{(z,w) : |z| < 1, |w| < 1\}$$

上の正則関数全体を $Hol(\mathbb{D}^2)$ で表す。$\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ は

$$H^2(\mathbb{D}^2) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}^2) \,\middle|\, \|f\|^2 = \lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}) \right|^2 \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} < \infty \right\}$$

によって定義される。2 変数 Hardy 空間というと，単位開球上の Hardy 空間もあるが，本講演では $\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間について考える。

2 変数正則関数からなる空間においては，それぞれの座標関数の掛け算作用に対して不変であるもの，つまり閉部分空間 M で

$$zM \subset M \quad \text{かつ} \quad wM \subset M$$

を満たすものを不変部分空間と呼ぶ。$H^2(\mathbb{D}^2)$ で最も単純な不変部分空間 M の例として，1 変数 Hardy 空間のような

$$M = \varphi H^2(\mathbb{D}^2) \qquad (\varphi \text{ は内部関数})$$

の形のものが挙げられる。しかし，$H^2(\mathbb{D}^2)$ においては，この形ではない不変部分空間が数多く存在する。上記の形の不変部分空間について，その特徴付けは不変部分空間 M 上の作用素を用いて次のように与えられている：

Mandrekar の定理 ([6])

M を $H^2(\mathbb{D}^2)$ の不変部分空間とし，M 上の作用素

$$R_z = P_M T_z, \quad R_w = P_M T_w \qquad \text{on} \quad M$$

とする。そのとき，M が Beurling 型不変部分空間，つまり

$$M = \varphi(z,w)H^2(\mathbb{D}^2) \qquad (\varphi \in H^2(\mathbb{D}^2), \ \ |\varphi| = 1 \text{ on } \mathbb{T}^2)$$

であることと，

$$R_z R_w^* = R_w^* R_z$$

であることは同値である。

$H^2(\mathbb{D}^2)$ の不変部分空間のランクについては，Bergman 空間と同様に，任意の $1 \leq k \leq \infty$ に対して $\operatorname{rank}(M) = k$ となる不変部分空間 M が存在する。ここで，1 変数 Hardy 空間，Bergman 空間において $[M \ominus zM] = M$ が成り立つが，$H^2(\mathbb{D}^2)$ においても

$$[M \ominus [zM + wM]] = M \tag{1}$$

であるかという自然な問題が出てくる。しかし，任意の不変部分空間 $M \neq \{0\}$ に対して

$$1 \leq \dim(M \ominus [zM + wM]) \leq \operatorname{rank}(M)$$

であるが，$H^2(\mathbb{D}^2)$ では

$$\dim(M \ominus [zM + wM]) = \operatorname{rank}(M) \tag{2}$$

とならない不変部分空間 M が存在し，一般的には (1) は成り立たない。では (2) を満たす不変部分空間は (1) を満たすだろうか。これに関して，Nakazi によって次の問題が提出されている：

Nakazi の問題 ([7])

関数 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ とし，$M = [f]$ とする。そのとき，常に

$$\dim(M \ominus [zM + wM]) = \operatorname{rank}(M) = 1$$

であるが，

$$[M \ominus [zM + wM]] = M$$

であるか。

4 Nakazi の問題

ここからは [4] の結果について述べる。$f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ を 0 でない関数とする。考えるのは 1 つの関数によって生成される不変部分空間 $[f]$ であり，まずはこの部分空間について考える。

関数 f は $\mathbb{D}^2$ 上の関数であるが，

$$f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}) \qquad \text{on a.e. } \mathbb{T}^2$$

と書くことにする。

$$d\mu = |f|^2 \, dm \qquad \text{on } \mathbb{T}^2$$

ただし dm は $\mathbb{T}^2$ 上のルベーグ測度，とおく。この $d\mu$ を用いて，$\mathbb{C}^2$ 上の多項式環 $\mathcal{C}$ の $L^2(d\mu)$ ノルムでの閉包を $H^2(d\mu)$ で表記する，つまり

$$H^2(d\mu) = \overline{\mathcal{C}}^{L^2(d\mu)} = \overline{\mathcal{C}}^{H^2(d\mu)}$$

と書ける。そのとき，$H^2(d\mu)$ は $\mathbb{T}^2$ 上の関数空間であり，

$$\mathcal{C} \subset H^2(d\mu), \qquad \mathcal{C} \cdot H^2(d\mu) \subset H^2(d\mu)$$

を満たす。ここでは，見やすくするため $M_f = [f]$ とおくことにする。M_f と $H^2(d\mu)$ の間で次の関係が成り立つ：

命題 1 すべての $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ に対して，$M_f = fH^2(d\mu)$ である。

この段階で $H^2(d\mu)$ は $\mathbb{T}^2$ 上の関数空間であるが，Oka の定理より $\mathbb{D}^2$ 上の正則関数空間としてみなすことができる。では，このとき

$$[f] \ominus [z[f] + w[f]]$$

に含まれる関数はどのようなものであるだろうか。実際には、

$$H^2(d\mu) = \overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)} \oplus \mathbb{C} \cdot K_\mu, \qquad \langle 1, K_\mu \rangle_{H^2(d\mu)} = 1$$

を満たす $K_\mu \in H^2(d\mu)$ がただ一つ存在し，

$$M_f = \overline{zM_f + wM_f}^{H^2(\mathbb{D}^2)} \oplus \mathbb{C} \cdot fK_\mu$$

と書ける。このとき，次がわかる：

命題 2 関数 K_μ は $H^2(d\mu)$ の原点における再生核である，つまり

$$\langle h, K_\mu \rangle_{H^2(d\mu)} = h(0,0), \qquad h \in H^2(d\mu)$$

が成り立つ。

Hilbert 空間 $\mathcal{H} \subset Hol(\mathbb{D}^n)$ において，$F\mathcal{C} = \{Fp : p \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の多項式}\}$ が $\mathcal{H}$ で稠密であるとき関数 F は $\mathcal{H}$ の巡回ベクトルであるという。このとき，Nakazi の問題は次により，$H^2(d\mu)$ の原点における再生核は常に巡回ベクトルであるかという問題と同値であることがわかる。

命題 3 $[fK_\mu] = M_f \iff K_\mu$ は $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルである。

5 非巡回な再生核

4 節のことから，任意の $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ に対して，f によって定まる $H^2(d\mu)$ の原点における再生核 K_μ は $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルであるか？ということに，Nakazi の問題を言い換えることができる。実際には [4] で成り立たない例を見つけることができた。

定理 ([4])

関数 $f \in H^2$ とし，$M = [f]$ とする。そのとき，常に

$$\dim(M \ominus [zM + wM]) = \mathrm{rank}\,(M) = 1$$

であるが,

$$[M \ominus [zM + wM]] \neq M$$

となる f が存在する。

いま $\mathbb{D}^2$ 上の有界正則関数全体を $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ で表すことにし，関数 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ で $|f| \geq \delta > 0$ a.e. on $\mathbb{T}^2$ を満たすものを考える。そのとき，$M_f = fH^2(\mathbb{D}^2)$ となり，集合として $H^2(d\mu) = H^2(\mathbb{D}^2)$ となる。また，巡回性について次のことがわかる：

命題 4 関数 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ を，ある $\delta > 0$ に対して

$$|f| \geq \delta \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}^2$$

を満たすものとする。そのとき，次は同値である：

(1) $h \in H^2(d\mu)$ は $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルである

(2) h は $H^2(\mathbb{D}^2)$ の巡回ベクトルである。

いま z 変数ディスク環を $\mathcal{A}(\mathbb{D}_z)$ によって表記する。定数でない関数 $G(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_z)$ とし， $\|G\|_\infty < 1$ を満たすものとする。そのとき，外部関数 $F(z)$ で

$$|G|^2 + |F|^2 = 1 \qquad \text{a.e. on } \mathbb{T}_z$$

を満たすものが存在する。これらの G, F に対して，$\mathbb{D}^2$ 上の内部関数 φ で

$$\frac{\varphi F(z)}{w - G(z)} \in H^2(\mathbb{D}^2)$$

を満たすものが存在する。$G(z)$ の定め方によって，この形の関数の中に，その関数によって定まる $H^2(d\mu)$ の原点における再生核が命題 4 の (2) を満たさないケースがあることを明らかにし，Nakazi の問題が成り立たないことを明らかにした。

References

[1] A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg; *Beurling's theorem for the Bergman space*, Acta Math. **117** (1996), 275–310.

[2] A. Beurling; *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239–255.

[3] X. Chen, K. Guo; *Analytic Hilbert Modules*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[4] K.H. Izuchi; *Cyclicity of reproducing kernels in weighted Hardy spaces over the bidisk*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 546–558.

[5] K.J. Izuchi, K.H. Izuchi, Y. Izuchi; *Wandering subspaces and the Beurling type theorem I*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 439–446.

[6] V. Mandrekar; *The validity of Beurling theorems in polydiscs*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 145–148.

[7] T. Nakazi; *Szegö's theorem on a bidisc*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 421–432.

[8] W. Rudin; *Function Theory in Polydiscs*, W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[9] S. Shimorin, *Wold-type decompositions and wandering subspaces for operators close to isometries*, J. reine angew. Math. **531** (2001), 147–189.