Pseudo-monodromy and the Mandelbrot set

石井 豊

九州大学数理学研究院

複素 Hénon 写像族のパラメータ空間は, わからないことが多すぎる. 本講演では, 複素 Hénon 写像族のパラメータ空間の構造に関するある予想の解決に向けた第一歩について説明する.

複素 Hénon 写像族とは,

$$f_{c,b}(x, y) \longmapsto (x^2 + c - by, x)$$

で与えられる $\mathbb{C}^2$ 上の多項式写像の族である. ここで $(c, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ はこの族のパラメータで, 以下ではこの $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ を複素 Hénon 写像族の**パラメータ空間**と呼ぶことにする.

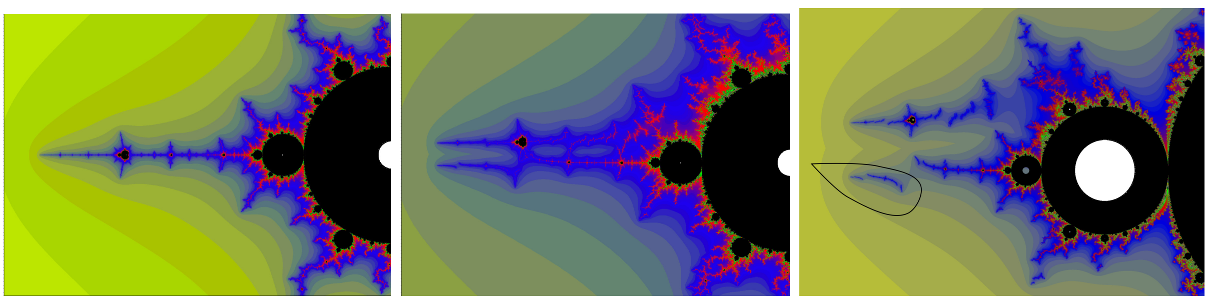

FIGURE 1. 左から $b = 0$, $b = 0.015i$, $b = 0.05i$ における c-平面の図 [L].

いわゆる「カオス的」な力学系のなかで最も典型的な例のひとつに, 記号力学系の**シフト写像** $\sigma : \{A, B\}^{\mathbb{Z}} \to \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$ がある. 複素 Hénon 写像 $f_{c,b}$ の Julia 集合 $J_{c,b}$ は 1 変数の場合と同様に定義され, その形状は (c, b) の取り方によって変化する. そこで, **複素ホースシュー領域**を

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \left\{ (c, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times : f_{c,b} \text{ は双曲的ホースシュー} \right\}$$

で定める. ここで $f_{c,b}$ が**双曲的ホースシュー**であるとは, 制限写像 $f_{c,b} : J_{c,b} \to J_{c,b}$ が双曲的かつシフト写像と位相共役になることである. $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ は複素 Hénon 写像族 $f_{c,b}$ の Mandelbrot 集合 $\mathfrak{M}$ の真部分集合になる.

いま, $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 内のループ $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ を一つ取り, 共役写像 $h_{\gamma(0)} : J_* \to \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$ を固定する (ここで $* = \gamma(0)$). すると, その連続な延長 $h_{\gamma(t)} : J_{\gamma(t)} \to \{A, B\}^{\mathbb{Z}}$ はループ上の各点 $\gamma(t)$ で $f_{\gamma(t)}$ と σ の位相共役を与える. このとき, その始点と終点で与えられる位相共役 $h_{\gamma(0)}$ と $h_{\gamma(1)}$ を用いて, 記号力学系の自己同型群への**モノドロミー作用**

$$\rho : \pi_1(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}, *) \ni [\gamma] \longmapsto h_{\gamma(0)} \circ (h_{\gamma(1)})^{-1} \in \mathrm{Aut}(\{A, B\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$$

が定まる. この作用に関し, C. Lipa [L] は数値実験に基づいて次の**モノドロミー予想**を提出した (より精密な議論 [R] も参照のこと). Figure 1 を左から右に見ていくと, $|b|$ が増加するとき $\mathfrak{M}$ は 2 つの不完全なコピーにスプリットし, さらにその一部は分離する. このとき, あるコピーとその分離した先端部を囲むループ $[\gamma] \in \pi_1(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}, *)$ に対して, モノドロミー作用 $\rho([\gamma])$ はコピーを特徴付ける記号列と分離した先端部を特徴付ける 1 次元力学系の記号列で記述できると予想した. この予想は (幾つかの未定義概念を含むものの) 複素 Hénon 写像族のパラメータ空間の組み合わせ論的構造に関する初めての言及であり, 相空間とパラメータ空間を結ぶ架け橋になると期待される.

残念ながらこの予想を攻略するよいアイデアを筆者はまだ持っていない. そこで手始めとして, この予想が 1 変数に退化した $b = 0$ の状況を考えることにしよう. ところが 1 変数の 2 次多項式の場合, その Mandelbrot 集合 $\mathfrak{M}_0$ は連結かつ単連結なことが証明されている [DH]. そのため, 対応するホースシュー領域の基本群は $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathfrak{M}_0, *) \cong \mathbb{Z}$ となり, しかもその生成元 1 の作用は $\{A, B\}^{\mathbb{N}}$ の A と B を入れ替えるという位数 2 の変換になってしまうことがわかる. つまりこのままではモノドロミー作用は 2 次元の Lipa 予想のような豊富な情報を与えてくれない.

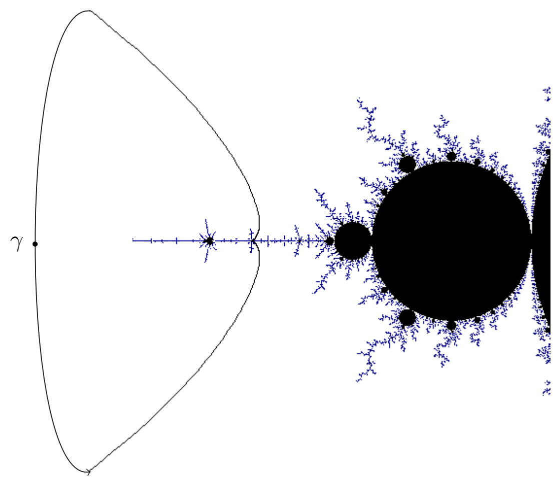

FIGURE 2. Pseudo-loop の例 [IR].

そこで, 本講演では Figure 2 のような “pseudo-loop” (つまり $|b| \neq 0$ に摂動すれば $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 内の本当の loop になるようなもの) を考え, このような pseudo-loop に沿った “pseudo-monodromy” をうまく定式化して考察する. 主定理は以下のとおりである.

Theorem 1 (I–Richards [IR], 2025)**.** *H を Mandelbrot 集合の双曲的成分であってカージオイドと異なるものとする. このとき,*

$$\Pi_1(H) \subset \bigcup_{H' \triangleright H} \left(\mathbb{T}_{K(H')} \cup \mathbb{T}_{\widehat{K}(H')_\star} \right)$$

が成立する.

特にこの帰結として,

Corollary 1 (I–Richards [IR], 2025)**.** *H を Mandelbrot 集合の双曲的成分であってカージオイドと異なるものとする. このとき, $\theta \in \mathbb{T}$ に対して次の (i) と (ii) は同値.*

(i) $\theta \in \mathrm{Disc}(H)$.

(ii) 次のどちらかを含む部分を除いて $I_H^+(\theta)$ と $I_H^-(\theta)$ は一致する; $*$ を A または B としたとき, ある $i_1 i_2 \cdots \in \Sigma_L^{\mathbb{N}}$ が存在して

  (a) ある $n \geq 1$ に対して $*\widehat{K}(H_{i_1}) * \widehat{K}(H_{i_2}) * \cdots * \widehat{K}(H_{i_{n-1}}) * K(H_{i_n})$ の形のワード,

  (b) $*\widehat{K}(H_{i_1}) * \widehat{K}(H_{i_2}) * \cdots$ の形の無限ワード.

  しかも, 記号列 $I_H^+(\theta)$ と $I_H^-(\theta)$ は $*$ の桁のところで反対の記号を持つ.

この結果は, Lipa のモノドロミー予想の退化バージョンと解釈できる. 未定義の用語や記号については講演中に説明する予定である.

References

[DH] A. Douady, J. Hubbard, *Itérations des polynômes quadratiques complexes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), no. 3, 123–126.

[IR] Y. Ishii, T. Richards, *Pseudo-monodromy and the Mandelbrot set.* Accepted for publication in Trans. Amer. Math. Soc. (2025), available at `https://arxiv.org/abs/2405.02204`.

[L] C. Lipa, *Monodromy and Hénon mappings.* Ph.D dissertation, Cornell University (2009).

[R] T. Richards, *On monodromy and complex Hénon maps.* Ph.D dissertation, University of Warwick (2022).