微視的安定性閾値と定スカラー曲率ケーラー計量について

青井　顕宏 *

和歌山工業高等専門学校

概要

本稿では, 近年 R. Berman 氏によって進められてきたコンパクトな複素多様体上における Kähler-Einstein 計量に対する確率論的アプローチの一部を一般化し, 微視的安定性閾値と呼ばれる不変量を用いることで, 偏極代数多様体上の (錐的特異点までを許した) 定スカラー曲率 Kähler 計量の存在に関する十分条件をいくつか与える.

1　背景

本稿のもっと中心的な興味の対象は, 定スカラー曲率 Kähler 計量と呼ばれる, 曲率に関して特別な条件を満たす Kähler 計量である. 本稿における主要な結果を述べるためには, この数年において R. Berman によって確立されてきた Kähler-Einstein 計量に関する確率論的なアプローチやそれに深く関連している研究についてある程度正確に述べる必要がある. 第 1 章では Kähler-Einstein 計量を定義し, 本研究と関わる背景について概観する.

1.1　Kähler-Einstein 計量

複素多様体 X 上の実 (1,1)-形式 ω が正定値かつ外微分 d に関して閉じているとき, ω を Kähler 形式と呼び, 複素多様体 X を Kähler 多様体と呼ぶ. Kähler 形式はその複素構造から自然にエルミート計量を誘導することが知られており, 本稿ではこの意味で Kähler 形式のことを全て Kähler 計量と呼ぶ. Kähler 多様体は, その複素構造に適合した, 曲率に関して特別な条件を持つ Kähler 計量 (標準計量や canonical Kähler metric と呼ばれる) を持つであろうと期待されている. どのような条件を満たす Kähler 計量を標準計量と呼ぶべきか?という問題は微妙な問題であるが, その重要な候補として, 後に定義する Kähler-Einstein 計量や定スカラー曲率 Kähler 計量などが中心的に注目を集め, 研究がなされてきた.

以下では, Kähler 多様体 X はコンパクトであるとし, その複素次元を n とする. Kähler 計量 ω から定まる体積形式 ω^n は反標準直線束 $-K_X(:= \det T^{1,0}X)$ のエルミート計量を自然に定め, その Chern 曲率形式に $\sqrt{-1}$ をかけたものを ω の Ricci 形式と呼び, $\mathrm{Ric}\,\omega$ と書く. ω と $\mathrm{Ric}\,\omega$ はその定義からどちらも実閉 (1,1)-形式であり, Rimann 幾何の場合と同様に自然に Einstein 計量を定義することができる.

定義 1. 次を満たす定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在するとき, ω を Kähler-Einstein 計量と呼ぶ:

$$\mathrm{Ric}\,\omega = \lambda\omega.$$

この条件は $\mathrm{Ric}\,\omega$ が Kähler 計量 ω に対して定義される $\overline{\partial}$-Laplacian $\Delta_{\overline{\partial}}$ に関して調和形式であることと同値である. Kähler 多様体上の調和積分論によって, 別の Kähler 計量 ω' が ω と同じコホモロジー類を持つ ($[\omega'] = [\omega]$ が成り立つ) のであれば, ある X 上の滑らかな関数 ϕ によって $\omega' = \omega + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi$ と書くことがで

* aoi@wakayama-nct.ac.jp,　takahiro.aoi.math@gmail.com

きる．これにより Kähler-Einstein 計量の存在に関する問題は方程式

$$\mathrm{Ric}\,(\omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi)=\lambda(\omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi),\quad \omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi>0$$

を満たす X 上の関数 ϕ が存在するか?という問題に帰着される．さらに調和積分論からの重要な帰結として, Kähler-Einstein 計量の存在・非存在は以下の複素 Monge-Ampère 方程式と呼ばれる未知関数 ϕ に対する 2 階の非線形偏微分方程式の可解性と同値になる:

$$\left(\omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi\right)^n=e^{f-\lambda\phi}\omega^n,\quad \omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi>0.$$

ただしここで f は Ricci ポテンシャルと呼ばれる関数で, $\mathrm{Ric}\,\omega=\lambda\omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f$ を満たす．実際にこの方程式を満たす関数 ϕ が存在すれば, Kähler 計量 $\omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi$ は Kähler-Einstein 計量となる．Ricci 形式はその定義から X の第一 Chern 類 $c_1(X)$ を代表することが直ちに従う．この事実から Kähler-Einstein 計量の存在を問う場合には, 定数 λ の符号に応じて以下の 3 つの場合のみを考えればよい.

- $c_1(X)<0$ ($\lambda<0$ の場合に対応し, X は canonically polarized であるという)
- $c_1(X)=0$ ($\lambda=0$ の場合に対応. Calabi-Yau 多様体)
- $c_1(X)>0$ ($\lambda>0$ の場合に対応. Fano 多様体)

複素次元が 1 のとき, すなわち閉 Riemann 面を扱う場合には, これらはそれぞれ上から種数が 2 以上のトーラス, 楕円曲線, Riemann 球面の場合に対応している．いずれの場合においても一意化定理によって Kähler-Einstein 計量の存在を示すことができ, 厳密に書き下すことができる．この閉 Riemann 面における結果の自然な高次元化の問題として, 1950 年代頃から Calabi を中心として, $c_1(X)$ が上記 3 条件のいずれかを満たす場合に X は Kähler-Einstein 計量を許容するか?という問題が研究された．しかし X が Fano である場合に, Kähler-Einstein 計量の存在に関する障害が存在することが松島や二木によって指摘されており ([28, 23])), 例えば 2 次元射影空間 $\mathbb{P}^2$ は Fubini-Study 計量を Kähler-Einstein 計量として持つが, それ 1 点で爆発 (blow-up) した複素曲面は Kähler-Einstein 計量を許容しない．Fano 多様体上の Kähler-Einstein 計量の存在に関する問題は後に述べるが, その他の場合においては Aubin と Yau によって次の重要な結果が証明された.

定理 2 ([3, 32])**.** コンパクト Kähler 多様体 X が $c_1(X)<0$ または $c_1(X)=0$ を満たすとき, 常に Kähler-Einstein 計量が存在する.

正確には Aubin と Yau が $c_1(X)<0$ である場合を, Yau が $c_1(X)=0$ である場合をそれぞれ証明している．本稿では Berman による研究との関連性を見るため, この定理の $c_1(X)<0$, すなわち X が canonically polarized である場合について掘り下げて説明する．適当な正規化を施し, $\lambda=-1$ と仮定する．この場合, Kähler-Einstein 計量が存在すれば一意であることは比較的簡単な議論から従うが, 存在に関しては連続法を先述の複素 Monge-Ampère 方程式に対して適応することで証明することができる．具体的にはパラメーター $t\in[0,1]$ に対して, 以下のような複素 Monge-Ampère 方程式を考える:

$$\left(\omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi_t\right)^n=e^{tf+\phi_t}\omega^n\quad\cdots\ (*)_t.$$

さらに $S:=\{\,t\in[0,1]\,|\,(*)_t$ が解を持つ $\}$ と定める．$t=0$ のときは自明な関数 $\phi_0=0$ が $(*)_0$ の解となるため $0\in S$ であり, 特に S は空集合でない．また逆関数定理によって S は開集合であり, 解に関する適切なアプリオリ評価を示すことで S は閉集合であることも分かる．以上より区間 $[0,1]$ の連結性から $S=[0,1]$ となり, $t=1$ の解 $\omega+\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi_1$ として Kähler-Einstein 計量を得る.

このような連続法による Kähler-Einstein 計量の存在証明は, ω に cohomologous な別の Kähler 計量をとった場合にも機能する (すなわち $[\omega']=[\omega]=-c_1(X)$ となるいかなる Kähler 計量 ω' をとっても, ω' を初期計量とする Kähler-Einstein 計量へ至る計量の族を構成することができる) ため, 構成に関してはこの意味で

初期計量の取り方に依存している. Berman は上に述べたような Kähler-Einstein 計量の存在証明の結果からさらに踏み込んで, 高次元の場合において, 初期計量の取り方などに依らない canonical な構成によって, 閉 Riemann 面のときのように Kähler-Einstein 計量を厳密に書き下すことができるか?という問題を確率論的観点から研究した. もう少し正確には, Berman は X が canonically polarized である場合に, 複素多様体のみから決まるデータによって記述された canonical な Kähler 計量の列で, Kähler-Einstein 計量に適切な意味で収束するものを構成しており, 次節ではそれについて述べる.

1.2 Kähler-Einstein 計量と大偏差原理

Berman による確率論的アプローチを述べるために, 論文 [4, 5] に従い準備を行う. 論文では熱力学や統計力学で用いられる用語 (自由エネルギーや分配関数, Gibbs 測度など) がよく使われており, 本稿でもそのまま踏襲するが, 後回しにするものも含め定義等は全て書いていく. 以後 $V := \int_X \omega^n$ とし, $dV := \omega^n/V$ とする. dV は X 上の確率測度であることに注意せよ. まず, X 上の確率測度の空間 $P(X)$ 上の汎関数である自由エネルギー F_β を

$$F_\beta(\mu) := \mathrm{Ent}_{dV}(\mu) + \beta E(\mu), \quad \mu \in P(X)$$

で定める. ここで, Ent_{dV} は測度 dV に対する相対エントロピーであり, E は pluricomplex energy と呼ばれる汎関数で, これらの定義や性質の詳細については第 2 章で述べる. また, $\beta \in \mathbb{R}$ を逆温度と呼ぶ. 自由エネルギー F_β の臨界点 μ_β は以下の意味で twist された Kähler-Einstein 方程式を満たす:

$$\mathrm{Ric}\,(\omega_{\beta KE}) = -\beta\omega_{\beta KE} + (1-\beta)\mathrm{Ric}\,\omega, \quad \mu_\beta = \frac{\omega_{\beta KE}^n}{V}.$$

本節では X は常に canonically polarized, すなわち $c_1(X) < 0$ であると仮定する. この条件は小平の埋蔵定理によって標準直線束 K_X が豊富, つまり任意の十分大きい k に対して $kK_X := K_X^{\otimes k}$ が適切な意味で十分多くの大域的正則切断を持つという条件と同値である. 大域的正則切断の空間 $H^0(X, kK_X)$ は有限次元複素線形空間であり, その次元は $N = N_k := \dim H^0(X, kK_X) = O(k^n)$ を満たす. $H^0(X, kK_X)$ の基底 $(s_i^{(k)})_{i=1}^N$ を固定する. やや唐突ではあるが, X の N 個の直積空間 X^N を考え, その上のスレーター行列式と呼ばれる正則切断 $\det S^{(k)}$ を次で定義する:

$$\det S^{(k)}(x_1, ..., x_N) := \det\left(s_i^{(k)}(x_j)\right)_{ij} \in H^0\left(X^N, kK_{X^N}\right).$$

さらに Gibbs 測度と呼ばれる X^N 上の確率測度を次で定める:

$$\mu_\beta^{(N)} := \frac{e^{-\beta N E^{(N)}} dV^{\otimes k}}{\mathcal{Z}_N(\beta)} = \frac{\left\|\det S^{(k)}\right\|^{2\beta/k} dV^{\otimes k}}{\mathcal{Z}_N(\beta)}.$$

ここで, $\|\cdot\|$ は dV から定まる K_X のエルミート計量であり, $E^{(N)} := -\frac{1}{kN}\log\left\|\det S^{(k)}\right\|^2$ である. Gibbs 測度の定義に現れる規格化定数 $\mathcal{Z}_N(\beta)$ は分配関数と呼ばれ, 以下で定義される:

$$\mathcal{Z}_N(\beta) := \int_{X^N} e^{-\beta N E^{(N)}} dV^{\otimes k} = \int_{X^N} \left\|\det S^{(k)}\right\|^{2\beta/k} dV^{\otimes k}.$$

Gibbs 測度 $\mu_\beta^{(N)}$ は, その定義から基底の取り方に依存しないことに注意せよ. また Gibbs 測度は直積 X^N に対する置換群の自然な作用に関して不変である. この事実から測度空間 $(X^N, \mu_\beta^{(N)})$ 上に, empirical measure と呼ばれる確率測度の空間 $P(X)$ 上に値をとる確率変数 δ_N を定義することができる:

$$\delta_N : X^N \to P(X)\ ;\ (x_1, ..., x_N) \mapsto \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}.$$

ここで δ_x は点 $x \in X$ 上の Dirac 測度を表す. 押し出し $(\delta_N)_*\mu_\beta^{(N)} \in P(P(X))$ を the law of the empirical measure と呼ぶ. Berman は以上の準備のもとで, 次の定理を示した.

定理 3 ([5, 7])**.** 任意の $\beta > 0$ に対して, the law of the empirical measure $(\delta_N)_*\mu_\beta^{(N)}$ は次の意味で大偏差原理を満たす; 任意の $\mu \in P(X)$ に対し, 次が成り立つ.

$$-\left(F_\beta(\mu) - \inf_{P(X)} F_\beta\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log(\delta_N)_*\mu_\beta^{(N)}(B_\epsilon(\mu)) = \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log(\delta_N)_*\mu_\beta^{(N)}(B_\epsilon(\mu)).$$

この文脈で, 汎関数 $F_\beta - \inf_{P(X)} F_\beta$ は rate 関数, $N = N_k$ は speed と呼ばれる. また $B_\epsilon(\mu)$ は μ を中心とした 2-Wasserstein 距離に関する半径 ϵ の球である. (確率測度の空間内の球であることに注意せよ.) この定理によって, $N \to \infty$ としたときに測度 $(\delta_N)_*\mu_\beta^{(N)}$ の質量が自由エネルギー F_β の臨界点 μ_β (すなわち twisted Kähler-Einstein 計量から定まる確率測度) に密集していくことが分かり, empirical measure δ_N が確率の意味で μ_β に収束することが示される. さらにスレーター行列式 $\det S^{(k)}$ の定義より, $\beta = 1$ の場合は Gibb 測度は dV を使わずに定義することができる:

$$\mu_1^{(N)} = \frac{(\det S^{(k)})^{1/k} \wedge \overline{(\det S^{(k)})^{1/k}}}{\mathcal{Z}_N(1)}. \tag{1}$$

これより, Gibbs 測度を X^{N-1} 上で積分することで得られる X 上の確率測度 $\int_{X^{N-1}} \mu_1^{(N)}$ は, 基底や dV の取り方に依存せず定義されており, さらに Gibbs 測度の置換群の作用に関する不変性を使うことによって, これは δ_N の Gibbs 測度に関する期待値 $\mathbb{E}(\delta_N)$ に一致していることが分かる. 以上から $N \to \infty$ としたとき $\int_{X^{N-1}} \mu_1^{(N)} = \mathbb{E}(\delta_N) \to \mu_1 = V^{-1}\omega_{KE}^n$ であることがわかり, $\int_{X^{N-1}} \mu_1^{(N)}$ の曲率形式 ω_k は dV や初期計量などのデータに依存しない canonical な列として, ω_{KE} にカレントの意味で収束することが示される.

canonical な列 ω_k を構成するうえで, 式 (1) のように書けることは非常に重要である. 本節では X が canonically polarized であり, kK_X が十分多くの正則切断を持つ場合を扱ったが, 次節では $-kK_X$ が正則切断を十分多く持つ場合 (X が Fano の場合) に関する Berman の研究について述べる.

1.3 Fano 多様体における Kähler-Einstein 計量, δ-不変量と微視的安定性閾値

本節では X は Fano 多様体, つまり $c_1(X) > 0$ であることを仮定する. すなわち十分大きい k に対して, $-kK_X$ は適切な意味で十分多くの大域的正則切断を持つ. Fano 多様体における Kähler-Einstein 計量の存在に関する問題は canonically polarized や Calabi-Yau の時に比べてより微妙であり, Kähler-Einstein 計量を許容しない Fano 多様体は豊富に存在する. この Kähler-Einstein 計量の存在に関する問題は, そもそもは非線形偏微分方程式に関する幾何解析の問題であるが, 正則ベクトル束上の Hermite-Einstein 計量に関する小林-Hitchin 対応の研究の観点から, ある種の代数幾何学的安定性と等価であることが予想され, Yau-Tian-Donaldson 予想と呼ばれ, 多くの数学者によって活発に研究された. この予想は一般の偏極代数多様体に対しても定式化することができ, それについては第 2 章で触れる. 特に Fano 多様体上の Kähler-Einstein 計量については, 以下の重要な結果が知られている.

定理 4 ([9, 16, 17, 18, 30, 34])**.** Fano 多様体 X に対し, X が Kähler-Einstein 計量を一意的に持つことと X が (一様)K 安定であることは同値である.

ここで K 安定性とは, テスト配位と呼ばれる X の代数多様体としてのある種の退化と, そのテスト配位に関する Donaldson-二木不変量で定義される代数幾何学的安定性であり, 1997 年に Tian に解析的に導入され, その後 Donaldson によって代数幾何学的に再定式化された. さらに一様 K 安定性とは K 安定を定義の段階からより強めたもの ([13, 20]) で, Berman-Boucksom-Jonsson によって Kähler-Einstien 計量の存在と等価であることが証明された ([9]). 本稿では一様 K 安定性の方に今後触れていく.

少なくとも Fano 多様体が Kähler-Einstein 計量を許容するときには, 前節のような確率測度を用いた canonical なアプローチが期待される. 自由エネルギー F_β の臨界点 μ_β は次のような twisted Kähler-Einstein 計量に対応する:

$$\mathrm{Ric}\,(\omega_{\beta KE}) = -\beta\omega_{\beta KE} + (1+\beta)\mathrm{Ric}\,\omega, \quad \mu_\beta = \frac{\omega_{\beta KE}^n}{V}.$$

つまり Ricci 形式が正である Kähler-Einstein 計量は $\beta = -1$ のときの解に対応しており, 逆温度 β としては負の値を考える必要がある. kK_X の代わりに $-kK_X$ に値をとる正則切断を考えることで前節と同様にスレーター行列式 $\det S^{(k)} \in H^0(X^N, -kK_{X^N})$ を定義することができるが, 対応する X^N 上の "測度"

$$(\det S^{(k)})^{-1/k} \wedge \overline{(\det S^{(k)})^{-1/k}}$$

は $\det S^{(k)}$ の零点に沿って特異性を持ち, Gibbs 測度に現れる規格化定数である分配関数 $\mathcal{Z}_N$ が well-defined であるかは一般には保障されない. これは前節のアプローチを実行するうえで根源的な問題を引き起こしているが, 逆に Berman はスレーター行列式 $\det S^{(k)}$ に関する可積分性の問題をある種の安定性条件として解釈し, 次のような不変量を導入した.

定義 5 ([5, 7])**.** X のレベル k における微視的安定性閾値 (microscopic stability threshold) を次で定義する:

$$\gamma_k(X) = \gamma_N(X) := \sup\left\{\gamma > 0 \,\middle|\, \mathcal{Z}_N(-\gamma) = \int_{X^N} \left\|\det S^{(k)}\right\|^{-2\gamma/k} dV^{\otimes k} < +\infty\right\}.$$

さらに, その極限を $\gamma(X) := \liminf_{N\to\infty} \gamma_N(X)$ で定める.

微視的安定性閾値 $\gamma_k(X)$ は基底の取り方に依存しないことに注意せよ. また, $\gamma_k(X)$ はその定義から組 $(X^N; \frac{1}{k}(\det S^{(k)} = 0))$ の対数的標準閾値 (log canonical threshold) として理解することができる. さらに,

定義 6 ([5, 7])**.** Fano 多様体 X は $\gamma(X) > 1$ を満たすとき, 一様 Gibbs 安定であるという.

藤田氏によって, 一様 Gibbs 安定性が K 安定性を導くことが示されており ([21]), さらに藤田-尾高によって導入された δ-不変量によって, 一様 Gibbs 安定性と一様 K 安定性との関係が議論された.

定義 7 ([22])**.** $H^0(X, -kK_X)$ の基底 $(s_i)_{i=1}^N$ に対し, $\mathbb{Q}$-因子 $D := \frac{\sum_{i=1}^N \{s_i = 0\}}{kN}$ を k-基底型因子 (k-basis type divisor) と呼ぶ. X のレベル k における δ_k-不変量を次で定める:

$$\delta_k(X) := \inf_{\substack{D\sim_{\mathbb{Q}} -K_X;\\ k-\text{basis type}}} \mathrm{lct}(X; D).$$

ここで, $\mathrm{lct}(X; D)$ は組 $(X; D)$ に対する対数的標準閾値である. さらに X の δ-不変量を次で定義する.

$$\delta(X) := \limsup_{k\to\infty} \delta_k(X).$$

後に Blum-Jonsson によって $\delta(X) = \lim_{k\to\infty} \delta_k(X)$ として書けることが証明された ([12]). この不変量 $\delta(X)$ は次の意味で一様 K 安定性を特徴づけている.

定理 8 ([12, 22])**.** Fano 多様体 X が一様 K 安定であることと, $\delta(X) > 1$ であることは同値である.

正確には条件 $\delta(X) > 1$ が一様 K 安定性に対する十分条件であることが藤田-尾高 ([22]) によって, 必要条件であることが Blum-Jonsson([12]) によって証明された. さらに Kewei Zhang 氏によって次の結果が得られた.

定理 9 ([34])**.** Fano 多様体 X が Kähler-Einstein 計量を一意的に持つことと, $\delta(X) > 1$ であることは同値である.

ここで, Zhang による証明は一様 K 安定性を経由していない (定理 4 を用いていない) ことに注意する. さらに藤田-尾高の論文において, δ_k-不変量と微視的安定性閾値について次の不等式が与えられた.

定理 10 ([22])**.** Fano 多様体 X に対し, 任意の k について, 次の不等式が成り立つ.

$$\delta_k(X) \geq \gamma_k(X).$$

特に, X が一様 Gibbs 安定であれば一様 K 安定であり, Kähler-Einstein 計量を持つ.

後に Berman([4]) によって Rubinstein-Tian-Zhang の結果 ([29]) を経由した解析的な別証明が与えられることになるが, 先に証明された上記の藤田-尾高による定理 10 は純代数幾何的手法によって証明されている．後で見るが, 少なくとも (極限をとらない有限の) 各 k に対して等号は一般には成立しないことが藤田, Blum-Jonsson, Rubinstein-Tian-Zhang([21, 12, 29]) によって知られている．さらに Berman によって分配関数 $\mathcal{Z}_N$ と twist された満渕汎関数

$$\mathcal{M}_{-\gamma}(\phi) := F_{-\gamma}(\mu) = \mathrm{Ent}_{dV}(\mu) - \gamma E^*(\mu), \quad \mu = V^{-1}\omega_\phi^n$$

に関する明示的な不等式が与えられ, 一様 Gibbs 安定性が Kähler-Einstein 計量の存在を導くことが, 一様 K 安定性や δ-不変量を経由することなく直接証明された.

定理 11 ([4])**.** 任意の $\gamma > 0$ と $k > 0$ に対し, 次が成立する.

$$-\frac{1}{N}\log \mathcal{Z}_N(-\gamma) \leq \frac{k+\gamma}{k+1}\inf \mathcal{M}_{-\gamma'} + O\left(k^{-1}\right)$$

ここで, $\gamma' := \gamma(1 - O(k^{-1}))$ である．特に X が一様 Gibbs 安定であれば Kähler-Einstein 計量が存在する.

ここで, Kähler-Einstein 計量の存在は満渕汎関数の強圧性 (coercivity) から導かれる．この強圧性については次章において説明する．逆に Kähler-Einstein 計量の存在あるいは一様 K 安定性から一様 Gibbs 安定性が導かれるか?という問題は依然として残されている．さらに empirical measure δ_N が Kähler-Einstein 計量から定まる確率測度へ収束するか?という問題も未解決である.

$$\begin{tikzcd}
\text{一様 K 安定性} \arrow[rr, Leftrightarrow, "\mathrm{Berman-Boucksom-Jonsson}"] \arrow[d, Leftrightarrow, "\mathrm{Fujita-Odaka,\ Blum-Jonsson}"'] & & \exists\ \text{Kähler-Einstein 計量} \\
\delta(X) > 1 \arrow[urr, Leftrightarrow, "\mathrm{Zhang}"] & & \\
& & \text{一様 Gibbs 安定性 } \gamma(X) > 1 \arrow[uu, Rightarrow, "\mathrm{Berman}"'] \arrow[ull, Rightarrow, "\mathrm{Fujita-Odaka,\ Berman}"]
\end{tikzcd}$$

2　定スカラー曲率 Kähler 計量 (cscK 計量)

第 2 章では偏極多様体 (X, L), つまりコンパクト Kähler 多様体 X とその上の豊富な直線束 $L \to X$ を考え, Kähler 計量 ω は $[\omega] = c_1(L)$ を満たすとする．またこの章では, X の非自明な正則自己同型で L にリフトできるものは存在しないと仮定する．ω の Ricci 形式 $\mathrm{Ric}\,\omega$ のトレースを考えることで, スカラー曲率 $S(\omega)$ を定義することができる．第 1 章でコンパクトな Kähler 多様体上の Kähler-Einstein 計量について概観したが, より一般化された標準計量の候補として次のような Kähler 計量がある.

定義 12. スカラー曲率 $S(\omega)$ が定数関数となる Kähler 計量を定スカラー曲率 Kähler 計量 (constant scalar curvature Kähler 計量, cscK 計量) という.

第 1 章の状況とは異なり, コホモロジー類 $c_1(L) = [\omega]$ は X の第一 Chern 類 $c_1(X)$ に比例しているとは限らないことに注意せよ．Kähler-Einstein 計量のときと同様に, cscK であるという条件は Ricci 形式 $\mathrm{Ric}\omega$ が Kähler 計量 ω に対して定義される $\overline{\partial}$-Laplacian $\Delta_{\overline{\partial}}$ に関して調和形式であるという条件と同値であり, この意味で cscK 計量は Kähler-Einstein 計量の自然な一般化となっている．また詳細を述べることはできないが, cscK 計量には藤木や Donaldson による無限次元におけるモーメント写像に関するある種の描像があることが知られている．Ricci 形式が $c_1(X)$ を代表しているという事実から, cscK 計量のスカラー曲率の値は以下の交点数の比に一致しなければならない:

$$\underline{S} = \frac{-nK_X L^{n-1}}{L^n}.$$

cscK 計量は関数 ϕ と正則局所座標 $(z^1, ..., z^n)$ を用いて $\omega_\phi = \omega + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi = \sqrt{-1}g_{\phi,i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$ と書いたときに, 次の 4 階の非線形偏微分方程式の解となっている:

$$S(\omega_\phi) = -g_\phi^{i\bar{j}}\partial_i\overline{\partial}_{\bar{j}}\log\det\left(g_{\phi,k\bar{l}}\right)_{kl} = \underline{S}.$$

ここで, $g_\phi^{i\bar{j}}$ は正定値エルミート行列 $(g_{\phi,k\bar{l}})_{kl}$ の逆行列の (i,j) 成分である. Fano 多様体における Kähler-Einstein 計量の時と同様に, cscK 計量は任意の Kähler 多様体上に存在するとは限らず, 例えば 2 次元射影空間を 1 点において爆発した複素曲面は Kähler-Einstein 計量はおろか, いかなる Kähler 類に対しても cscK 計量を許容しないことが知られている. cscK 計量の存在・非存在は Kähler-Einstein 計量と同様に, (一様)K 安定性やその亜種と同値であることが予想されている (一般偏極に対する Yau-Tian-Donaldson 予想). 本稿を執筆している数ヵ月前に, この予想に関する大きな進展が得られたことが Boucksom-Jonsson によってアナウンスされた. 筆者の勉強不足のため立ち入ることはできないが, いずれにしても cscK 計量に対してエネルギー汎関数を用いた変分法的アプローチが重要な役割を果たしており, 次節ではそれについて説明する.

2.1 満渕汎関数と強圧性

コホモロジー類を $c_1(L)$ に持つ Kähler 計量全体の空間を以下のように書く.

$$\mathcal{H}(L) := \left\{\phi \in C^\infty(X,\mathbb{R}) \,\middle|\, \omega_\phi = \omega + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi > 0\right\}.$$

X 上の外微分 d に関して閉じている実 (1,1)-形式 χ に対して, $\underline{\chi} := \frac{\int_X n\chi\wedge\omega^{n-1}}{V}$ と定義する. まず, $\mathcal{J}_\chi$-汎関数を以下で定義する.

$$\mathcal{J}_\chi(\phi) := \frac{1}{V}\sum_{j=1}^{n}\int_X \phi\chi\wedge\omega^{j-1}\wedge\omega_\phi^{n-j} - \frac{\underline{\chi}}{V(n+1)}\sum_{j=0}^{n}\int_X \phi\,\omega^j\wedge\omega_\phi^{n-j}.$$

$\mathcal{J}_\chi$-汎関数は χ に関して線形であることに注意する. さらに X 上の確率測度 $\nu \in P(X)$ に対する相対エントロピー Ent_ν は, 以下のように適切な汎関数の Legendre 変換として定義される.

$$\mathrm{Ent}_\nu(\mu) := \sup_{a\in C^0(X)}\left(\int_X a\mu - \log\int_X e^a\nu\right),\quad \mu \in P(X).$$

μ が ν に絶対連続でなければ $\mathrm{Ent}_\nu(\mu) = \infty$ となる. 絶対連続である場合は良く知られた関係式 $\mathrm{Ent}_\nu(\mu) = \int_X \log(\frac{d\mu}{d\nu})\mu$ に一致するが, この場合でも $\mathrm{Ent}_\nu(\mu) = \infty$ となり得ることに注意せよ. これら 2 つの汎関数の性質については次節でもう少し深く掘り下げる. 満渕汎関数 (満渕の K-energy) を以下で定義する.

$$\mathcal{M}(\phi) := \mathrm{Ent}_{dV}\left(V^{-1}\omega_\phi^n\right) + \mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,\omega}(\phi)$$

この定義の右辺は正確には満渕汎関数の Chen-Tian 公式と呼ばれるもので, もともと満渕汎関数は Donaldson 汎関数と呼ばれる正則ベクトル束上の Hermite 計量に関する汎関数の類似として満渕氏によって導入された ([27]). 満渕汎関数は cscK 計量をその臨界点に持ち, 適切な意味で凸になることが知られている. また先に述べた pluricomplex energy E は Aubin-Mabuchi energy と呼ばれる $\mathcal{H}(L)$ 上の汎関数を適切に変換して導入されるが ([4]), 特に次を満たすことが知られている:

$$E\left(V^{-1}\omega_\phi^n\right) = \mathcal{J}_\omega(\phi).$$

したがって, 上記の満渕汎関数は第 1 章において先に自由エネルギーから導入した twist された満渕汎関数と一致していることがわかる. 先に少し触れたが, 満渕汎関数は次の意味で cscK 計量の存在・非存在を特徴づけることが Chen-Cheng と Berman-Darvas-Lu によって証明された.

定理 13 ([10, 15])**.** 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) cscK 計量 $\omega_\phi \in c_1(L)$ が一意的に存在する.

(ii) 満渕汎関数 $\mathcal{M}$ は強圧的 (coercive) である. つまり定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して, 次を満たす.

$$\mathcal{M}(\phi) \geq C_1 \mathcal{J}_\omega(\phi) - C_2, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}(L).$$

強圧性の定義の右辺に現れる汎関数 $\mathcal{J}_\omega$ は, やや雑に述べると Kähler 計量全体の空間 $\mathcal{H}(L)$ の固定された点からの距離関数に整合的であり, 強圧性は汎関数の漸近的な振る舞いに関する性質である. Berman-Darvas-Lu が (i) から (ii) が導かれることを証明しており, 系として cscK 計量が一意に存在すれば偏極多様体 (X, L) は一様 K 安定であることを証明した ([10]). この後に Chen-Cheng が (ii) から cscK 計量に関する連続法が実行できることを示し, (i) が得られることを証明している ([15]). 本稿では詳しく述べないが, Chen-Cheng は cscK 計量の存在は全ての測地的 ray に関するスロープの正値性 (測地的安定性と呼ばれる) とも等価であることを示しており, 実際には測地的 ray に沿った振る舞いを調べ上げれば十分である ([15]). 定理 13 の証明のためには, 特異 Kähler 計量の空間まで拡張された満渕汎関数を考慮した, 多重ポテンシャル論を用いた高度な解析が必要となる. この結果によって非線形偏微分方程式の解である cscK 計量の存在に関する問題は満渕汎関数の漸近に関する性質を調べるという問題に帰着されたわけだが, そのためには満渕汎関数に含まれる相対エントロピーと $\mathcal{J}_\chi$-汎関数の両方の性質を理解することが重要である. 次節では, これらの汎関数が持つ性質についていくつか言及する.

2.2 $\mathcal{J}_\chi$-汎関数と Kewei Zhang による δ-不変量の一般偏極への応用について

本節ではまず満渕汎関数に第 2 項として含まれる $\mathcal{J}_\chi$-汎関数について触れ, その後に第 1 項である相対エントロピーの持つ性質や δ-不変量との関係について言及し, それらを応用した Zhang による仕事について振り返る. Kähler-Einstein 計量や cscK 計量は然るべき汎関数の臨界点として理解することができたが, $\mathcal{J}_\chi$-汎関数の臨界点についても興味深い研究があり, cscK 計量との深い関係がある.

定義 14. χ が Kähler であるとする. $\mathcal{J}_\chi$-汎関数の臨界点 ϕ に対応する Kähler 計量 ω_ϕ を $\mathcal{J}_\chi$-計量と呼び, それは次の方程式を満たす.

$$\mathrm{tr}_{\omega_\phi} \chi = \underline{\chi}.$$

$\mathcal{J}_\chi$-計量は ϕ に関する 2 解の非線形偏微分方程式の解である. χ が Kähler であることから上記の方程式は楕円型になることが知られている. Kähler 計量 ω_ϕ が $\mathcal{J}_\chi$-計量であるという条件は, χ が Kähler 計量 ω_ϕ に対して定義される $\overline{\partial}$-Laplacian に関して調和形式であるという条件と同値であり, この意味で $\mathcal{J}_\chi$-計量は cscK 計量や Kähler-Einstein 計量の類似と見なすことができる. さらに $\mathcal{J}_\chi$-計量は, cscK 計量における藤木や Donaldson による結果のように, 適切な意味でモーメント写像の描像を持つことが知られている. 先述の満渕汎関数に関する結果よりも先に, Collins-Székelyhidi によって以下が示されている.

定理 15 ([19])**.** χ が Kähler であると仮定する. $\mathcal{J}_\chi$-計量が存在することと, $\mathcal{J}_\chi$-汎関数が強圧的, つまり定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して次が成り立つことは同値である:

$$\mathcal{J}_\chi(\phi) \geq C_1 \mathcal{J}_\omega(\phi) - C_2, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}(L).$$

本稿では詳細を述べることはできないが, $\mathcal{J}_\chi$-計量の存在・非存在に関しては, 代数幾何学における中井-Moishezon による豊富判定法の類似と見なせるような特徴付けがあり, Lejmi-Szèkelyhidi や Gao Chen 達の貢献によってある種の部分多様体に関する幾何学的条件と等価であることが証明されている ([14, 26]). 上記の Collins-Szèkelyhidi による結果は cscK 計量の存在に関する問題について重要な意味を持つ. 相対エントロピーは非負であることに注意すると, 不等式 $\mathcal{M} \geq \mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,\omega}$ が得られる. これは次の系を直ちに導く.

系 16 ([15])**.** X が canonically polarized である, つまり $c_1(X) < 0$ であると仮定する. このとき, $\mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,\omega}$-計量が存在すれば, cscK 計量 ω_ϕ が存在する.

Yau の結果によって, X が canonically polarized であれば $-\mathrm{Ric}\,\omega > 0$ となる ω はいつでも $c_1(L)$ の代表元として見つけることができることに注意せよ．先述の通り $\mathcal{J}_\chi$-計量は 2 階の非線形偏微分方程式の解であるが, 複素多様体 X に適切な仮定をおくことで 4 階の方程式の解である cscK 計量の存在をこのように導くことができる．これだけでも十分興味深い結果に思われるが, 実は相対エントロピーは常に強圧的であることが知られており, この点を考慮することでさらに強い結果を得ることができる．古典的には Tian によって導入された α-不変量と呼ばれるコンパクト Kähler 多様体に関する不変量を用いることで相対エントロピーは強圧的であることが知られていたが ([8]), これが (一般偏極において定義された) δ-不変量 $\delta(L)$ によって最大限まで洗練できることが Kewei Zhang によって証明された．

定理 17 ([33])**.** $\delta(L)$ は相対エントロピー Ent_{dV} の coercivity threshold である．つまり任意の $\epsilon > 0$ に対してある $C_\epsilon > 0$ が存在して次を満たす．

$$\mathrm{Ent}_{dV}\left(V^{-1}\omega_\phi^n\right) \geq (\delta(L)-\epsilon)\mathcal{J}_\omega(\phi) - C_\epsilon, \quad \forall\phi \in \mathcal{H}(L).$$

この定理における定数 ϵ, C_ϵ について, $\mathcal{J}_\chi$-汎関数の χ に関する線形性を用いれば不等式

$$\mathcal{M}(\phi) \geq \mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,\omega+(\delta(L)-\epsilon)\omega}(\phi) - C_\epsilon \tag{2}$$

を得る．やや唐突であるが, $\mu(L) := \frac{-K_X L^{n-1}}{L^n} (= n^{-1}\underline{S})$ とし, L の nef thresholds を $s(L) := \sup\{s \in \mathbb{R} \mid -K_X - sL > 0\}$ で定義する．不等式 (2) を利用することで, Zhang は δ-不変量が cscK 計量の存在証明に関して有用であることを示した．

系 18 ([34])**.** $\mathbb{R}$-直線束 $K_X + \delta(L)L$ が豊富であり, 不等式 $\delta(L) > n\mu(L) - (n-1)s(L)$ が成立すると仮定する．このとき, cscK 計量 ω_ϕ が存在する．

系 18 は, 仮定の条件から $\mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,\omega+\delta(L)L}$-計量が存在するという Weinkove による結果を利用している ([31]). X が Fano 多様体で $L = -K_X$ となる場合を考えると, これらの仮定はどちらも $\delta(X) > 1$ という条件に一致し, 第 1 章でも述べたように一様 K 安定性及び Kähler-Einstein 計量の存在と同値である．この意味で系の 2 条件は Kähler-Einstien 計量の場合の自然な拡張とみることができる．

2.3 主要な結果とその応用について

この節で述べる本稿における主要な結果は, Berman が Fano の場合に証明した分配関数と満渕汎関数の間の不等式を, 特異性を許しつつ一般偏極の場合に拡張することである．この系として Zhang による先述の cscK 計量に関する結果の類似を Berman の研究の観点から得ることができる．先に述べるが, δ_k と γ_k に関する不等式 ([6, 22]) から, 我々の結果は Zhang の結果よりも真に強いものとなることはできない．一方で我々の結果は藤田-尾高の δ-不変量を経由しておらず, スレーター行列式から定まる特定の因子の可積分性のみから cscK 計量の存在を判定するという特徴がある．

特異性を持ちうる X 上の非負関数 $f \in L^p(dV)$, $p > 1$ に対して $dV_f := f dV$ と定め, 適当な正規化によって dV_f は確率測度であると仮定する．豊富直線束 L と dV_f に対して, 第 1 章のときと同様にスレーター行列式 $\det S^{(k)}$ と分配関数 $\mathcal{Z}_{N,f}$ を定義することができる．

$$\det S^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_N) := \det\left(s_i^{(k)}(x_j)\right)_{ij} \in H^0\left(X^N, (kL)^{\boxtimes N}\right),$$

$$\mathcal{Z}_{N,f}(-\gamma) := \int_{X^N} \left\|\det S^{(k)}\right\|^{-2\gamma/k} (dV_f)^{\otimes N}.$$

ここで, $(s_i^{(k)})_{i=1}^N$ は固定された $H^0(X, kL)$ の基底であることに注意せよ．

定義 19 ([1])**.** (X, L, f) に対して, 微視的安定性閾値及びその極限を次で定める．

$$\gamma_{k,f}(L) = \gamma_{N,f}(L) := \sup\left\{\gamma \geq 0 \mid \mathcal{Z}_{N,f}(-\gamma) < +\infty\right\},$$

$$\gamma_f(L) := \liminf_{N\to\infty} \gamma_{N,f}(L).$$

また, d-閉な実 (1,1)-形式 η に対して, 先述の満渕汎関数を一般化しておく.

定義 20.

$$\mathcal{M}_{f,\eta}(\phi) := \mathrm{Ent}_{dV_f}(V^{-1}\omega_\phi^n) + \mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,\omega+\eta}(\phi) \quad \phi \in \mathcal{H}(L).$$

本稿における主要な結果は以下の不等式である.

定理 21 ([1])**.** 任意の $\gamma, \tau > 0$ と十分大きい k で $f \in L^{k\tau/(k\tau-\gamma(1+\tau))}(dV)$ となるものに対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{N(1+\tau)}\log \mathcal{Z}_{N,f}(-\gamma(1+\tau)) + \mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,\omega+\eta+\gamma'\omega}(\phi) \\ \leq\ & \mathcal{M}_{f,\eta}(\phi) + \frac{k\tau-\gamma}{k(1+\tau)}\log\int_X f^{k\tau/(k\tau-\gamma(1+\tau))}dV + O(1), \quad \forall\phi \in \mathcal{H}(L). \end{aligned}$$

ここで, $\gamma' := \gamma(1-O(k^{-1}))$ である.

少し分かりにくいが, この結果は $\mathcal{J}_\omega$ を pluricomplex energy E に読み替えることで, 定理 11 の (L^p-関数 f までを考慮した) 一般化になっていることが分かる. これより以下の系が直ちに得られる.

系 22 ([1])**.** ある $\gamma \in (0, \gamma_f(L))$ が存在し, $\gamma c_1(L) + c_1(K_X) + [\eta]$ が Kähler 類かつ $\mathcal{J}_{-\mathrm{Ric}\,dV+\eta+\gamma\omega}$ が強圧的であると仮定する. このとき, $\mathcal{M}_{f,\eta}$ も強圧的となる.

この系は, 服部によって導入された special K-stability の不変量 γ_f に対する解析的な類似と見なすことができる ([24]). $f=1, \eta=0$ という自明な場合に, Zhang による定理と同様に Weinkove による $\mathcal{J}_\chi$-計量に関する結果 ([31]) を用いることで次の系を得る.

系 23 ([1])**.** $\mathbb{R}$-直線束 $K_X + \gamma(L)L$ が豊富であり, 不等式 $\gamma(L) > n\mu(L) - (n-1)s(L)$ が成立すると仮定する. このとき, cscK 計量 ω_ϕ が存在する.

ここで $f=1$ に対して $\gamma(L) = \gamma_1(L)$ と書いた. 本節の冒頭でも少し触れたが, $\delta(L) \geq \gamma(L)$ であることが知られており ([22, 6]), この系自体は Zhang の結果を経由することで証明することができる. 技術的ではあるが Berman による定理 11 と異なり, 定理 21 で τ というパラメーターを導入することで, 因子に沿って錐的特異性 (cone singularities) を許す cscK 計量についても扱えるようになった. (定義等については [35] を参照していただけば幸いである.) D を滑らかな因子とし, パラメーター $b \in (0,1]$ に対して先程定義した $\mu(L)$ と $s(L)$ の定義における K_X を, 全て対数的標準束 $K_X + (1-b)D$ に置き換えたものをそれぞれ $\mu_{(1-b)D}(L), s_{(1-b)D}(L)$ と書く. また, D の定義切断 σ_D に対して (滑らかなエルミート計量を固定し) $f_{(1-b)D} := |\sigma_D|^{2(1-b)}$ と書く.

系 24 ([1])**.** $\mathbb{R}$-直線束 $K_X + (1-b)D + \gamma_{f_{(1-b)D}}(L)L$ が豊富であり, 不等式 $\gamma_{f_{(1-b)D}}(L) > n\mu_{(1-b)D}(L) - (n-1)s_{(1-b)D}(L)$ が成立すると仮定する. このとき, D に沿って角度 $2\pi\beta$ の錐的特異点を持つ cscK 計量 ω_ϕ が存在する.

この系では, η として第一 Chern 類 $c_1(D)$ の滑らかな代表元を選んでいる. 錐的特異点を持つ cscK 計量の存在は Kai Zheng によって得られた対数的満渕汎関数の強圧性による特徴づけによって保証される ([35]). さらに簡単な議論によって, 任意の偏極多様体における次数が非常に大きい滑らかな因子に対して以下の結果が得られる.

系 25 ([1])**.** (X, L) と $b \in (0,1]$ にのみ依存する $m_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ で, 次を満たすものが存在する: 任意の $m \geq m_0$ と滑らかな因子 $D \in |mL|$ に対して, D に沿って角度 $2\pi\beta$ の錐的特異点を持つ cscK 計量 ω_ϕ が存在する.

α-不変量を用いた類似の結果が既に知られている ([2]). いずれの場合においても Zhang の結果 ([35]) から導くことができるが, 我々のアプローチでは cscK 計量の存在判定には (レベル k 毎に) スレーター行列式から

定まる因子の可積分しか考えておらず, δ-不変量には触れていない (基底型因子を見ていない) という特徴がある．ただし次節で見るように, 不変量 $\gamma(L)$ の計算は非常に難しく, 計算されている具体的な例はほぼ見つかっていないという現状がある．

定理 21 の証明の大きな流れは Berman による先行研究 ([6]) と同様であるが, 一般偏極の場合では満渕汎関数を確率測度の空間上の汎関数である自由エネルギー F_β と同一視することができないため, $\mathcal{J}_X$-汎関数に読み替えて議論を行う必要がある．また, 関数 $f \in L^p(dV)$ を分配関数 $\mathcal{Z}_N$ から分離するためにパラメーター $\tau > 0$ を導入し, Hölder 不等式を適切に用いる必要がある．また Berman の証明では, 複素関数論における重要な結果である Berndtsson の順像層に関する正値性の結果 ([11]) が用いられるが, 我々の場合でも同様に重要な役割を果たす．(ただし, τ を導入したことによって Berman の証明よりも少し簡略化されている.)

$$\begin{tikzcd}
\text{一様 K 安定性} & \exists\ \text{cscK 計量} \arrow[l, Rightarrow, "\text{Berman}-\text{Darvas}-\text{Lu}"'] \\
K_X + \delta(L)L > 0,\ \delta(L) > n\mu(L) - (n-1)s(L) \arrow[u, Rightarrow, "\text{Hattori, Weinkove, Gao Chen}"] \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Zhang}"] & \\
 & K_X + \gamma(L)L > 0,\ \gamma(L) > n\mu(L) - (n-1)s(L) \arrow[ul, Rightarrow, "\text{Fujita}-\text{Odaka, Berman}"] \arrow[uu, Rightarrow, "\text{A}"]
\end{tikzcd}$$

2.4 今後の問題について

最後に, 本稿の研究に関わる問題で未解決のものをいくつか挙げる．まず第 1 章でも少し触れたように, 以下の問題は未解決である．

問題 26 ([5, 6])**.** X を Fano 多様体とする．このとき, X が Kähler-Einstein 計量を持つことと, X が一様 Gibbs 安定であることは同値か? さらにこの場合, empirical measure δ_N は $N \to \infty$ としたときに Kähler-Einstein 計量から定まる確率測度に適切な意味で収束するか?

また, 微視的安定性閾値 $\gamma_k(X)$ やその極限 $\gamma(X)$ を具体的な Fano 多様体に対して計算することは現状非常に難しいように思われる．(ただし, $\gamma_k(X)$ 及び $\gamma(X)$ は先に少し述べた α-不変量以上になることが知られている.) 現時点で $\gamma(X)$ が計算されている具体例は, 筆者が知る範囲では藤田氏による $\mathbb{P}^1$ の例のみしか知られておらず, この場合でも計算は容易ではない ([21])．この場合では任意の k に対して $\gamma_k(\mathbb{P}^1) = \frac{2k}{2k+1}$ となることが計算されており, 極限をとれば $\gamma(\mathbb{P}^1) = 1$ である．一方で [12, 29] により $\delta_k(\mathbb{P}^1) = \delta(\mathbb{P}^1) = 1$ であることが知られていて, 第 1 章で述べた藤田-尾高による定理 10 の不等式の等号は有限の k では一般には成立しないことが分かる．極限をとった時の問題として,

問題 27 ([5, 6, 1])**.** 次の等式は成立するか?

$$\delta(L) = \gamma(L).$$

$L = -K_X$ の場合にこれが正しいとすると, Kähler-Einstein 計量の存在及び一様 K 安定性は一様 Gibbs 安定性と同値であることが証明されたことになる．ただし, empirical measure δ_N の収束に関してはさらに議論が必要なように思われる．

さらに X が canonically polarized または Fano である場合に, Kähler-Einstein 計量を一般化した coupled Kähler-Einstein 計量と呼ばれるものが Hultgren-Witt Nyström によって導入されている ([25])．現在進行中ではあるが, この場合に Berman が示した大偏差原理の結果や Gibbs 安定性に関する結果を自然に拡張することができるか?という問題は興味深い問題だと考えている．また, cscK 計量に対しても初期計量などの取り方に依存しない, ある種の canonical なアプローチを得ることができるか?という問いも今後の課題だと考えている．

[1] T. Aoi, Microscopic stability thresholds and constant scalar curvature Kähler metrics, arXiv:2410.22090.

[2] T. Aoi, Y.Hashimoto and K.Zheng, On uniform log K-stability for constant scalar curvature Kähler cone metrics, Comm. Anal. Geom. 33(3), 701–767 (2025).

[3] T, Aubin, Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris Ser., A 283, 119–121 (1976).

[4] R. J. Berman, A thermodynamical formalism for Monge-Ampère equations, Moser-Trudinger inequalities and Kähler-Einstein metrics, Adv. Math. 248, 1254–1297 (2013).

[5] R. J. Berman, An invitation to Kähler-Einstein metrics and random point processes, Surveys in differential geometry. Differential geometry, Calabi-Yau theory, and general relativity. Surv. Differ. Geom. 23, 35–87 (2018).

[6] R. J. Berman, The probabilistic vs the quantization approach to Kähler–Einstein geometry, Math. Ann. 388, 4383–4404 (2024).

[7] R. J. Berman, Kähler-Einstein metrics, canonical random point processes and birational geometry, Algebraic Geometry Salt Lake City 2015. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol.97.1. 29–73 (2018).

[8] R. J. Berman, S. Boucksom, P. Eyssidieux, V.Guedj and A. Zeriahi, Kähler-Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log Fano varieties, J. Reine Angew. Math. 751, 27–89 (2019).

[9] R. J. Berman, S. Boucksom and M. Jonsson, A variational approach to the Yau–Tian–Donaldson conjecture, J. Amer. Math. Soc. 34, no. 3, 605–652 (2021).

[10] R. J. Berman, T. Darvas and C. H. Lu, Regularity of weak minimizers of the K-energy and applications to properness and K-stability, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 53,, no. 4, 267–289 (2020).

[11] B. Berndtsson, Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations, Ann. Math. 169, 531–560 (2009).

[12] H. Blum and M. Jonsson, Thresholds, valuations, and K-stability, Adv. Math. 365, 107062 (2020).

[13] S. Boucksom, T. Hisamoto and M. Jonsson. Uniform K-stability, Duistermaat -Heckman measures and singularities of pairs, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 67, 87-139 (2017).

[14] G. Chen, The J-equation and the supercritical deformed Hermitian–Yang–Mills equation, Invent. math. 225, 529–602 (2021).

[15] X. X. Chen and J. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (II) - Existence results, J. Amer. Math. Soc. 34, no. 4, 937–1009 (2021).

[16] X. X. Chen, S. Donaldson and S. Sun, Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities, J. Amer. Math. Soc. 28, no. 1, 183–197 (2015).

[17] X. X. Chen, S. Donaldson and S. Sun, Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π, J. Amer. Math. Soc. 28, no. 1, 199–234 (2015).

[18] X. X. Chen, S. Donaldson and S. Sun, Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof, J. Amer. Math. Soc. 28, no. 1, 235–278 (2015).

[19] T. C. Collins and G. Székelyhidi, Convergence of the J-flow on toric manifolds, J. Differential Geom. 107(1), 47–81 (2017).

[20] R. Dervan, Uniform stability of twisted constant scalar curvature Kähler metrics, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2016, 4728–4783 (2016).

[21] K. Fujita, On Berman-Gibbs stability and K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties, Compos. Math. 152, 288–298 (2016).

[22] K. Fujita and Y. Odaka, On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors, Tohoku Math. J. (2) 70(4), 511–521 (2018)

[23] A. Futaki, An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math., 73, 437–443 (1983).

[24] M. Hattori, Minimizing CM degree and specially K-stable varieties, Int. Math. Res. Not. 2024, no. 7, 5728–5772 (2024).

[25] J. Hultgren and D. Witt Nyströlm, Coupled Kähler-Einsten metrics, Int. Math. Res. Not., 298 (2018).

[26] M. Lejmi and G. Székelyhidi, The J-flow and stability, Adv. Math. 274, 404–431 (2015).

[27] T. Mabuchi, K-energy maps integrating Futaki invariants, Tohoku Math. J. (2) 38(4), 575–593 (1986).

[28] Y. Matsushima, Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählériennes, Nagoya Math. J. 11, 145–150 (1957).

[29] Y. A. Rubinstein, G. Tian and K. Zhang, Basis divisors and balanced metrics, J. Reine Angew. Math. 2021, no. 778, 171-218 (2021).

[30] G. Tian, K-stability and Kähler-Einstein metrics, Comm. Pure. Appl. Math. 68, 1085–1156 (2015).

[31] B. Weinkove, On the J-Flow in Higher Dimensions and the Lower Boundedness of the Mabuchi Energy, J. Differential Geom. 73, 351–358 (2006).

[32] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equations, I, Comm. Pure Appl. Math. 31, 339–411 (1978).

[33] K. Zhang, Continuity of delta invariants and twisted Kähler-Einstein metrics, Adv. Math. 388, Paper No. 107888, (2021).

[34] K. Zhang, A quantization proof of the uniform Yau–Tian–Donaldson conjecture, J. Eur. Math. Soc. 26, 4763-–4778 (2024).

[35] K. Zheng, Existence of constant scalar curvature Kähler metrics, properness and geodesic stability, arXiv:1803.09506.